單元 5: 函數
(課本 §1.4)

一. 函數 (Function)

函數乃一種描述自變數 (independent variable) 與應變數 (dependent variable) 間的關係, 且滿足每一自變數僅對應到 (被指派到) 一個應變數的值, 如圖示.

二. 定義域 (Domain)

使得函數有定義的所有自變數的值所形成的集合, 稱為此函數的定義域.

三. 值域 (Range)

應變數所產生的所有值的集合, 稱為此函數的值域.

例如, (a) 方程式

$$x + y = 1$$

相當於

$$y = 1 - x$$

故, 可視爲 x 爲自變數, y 爲應變數的函數, 且

$$定義域 = (-\infty, \infty)$$

以及

$$值域 = (-\infty, \infty)$$

(b) 方程式

$$y = \sqrt{x-1}$$

可視爲自變數爲 x, 應變數爲 y 的函數, 且

$$定義域 = [1, \infty)$$

以及

$$值域 = [0, \infty)$$

(c) 數學式

$$y = \begin{cases} 1-x, & x < 1 \\ \sqrt{x-1}, & x \geq 1 \end{cases}$$

可視爲自變數爲 x, 應變數爲 y 的複合函數 (compound function), 因爲應變數乃由二個 (或多個) 公式所形成. 由應變數 y 的形成方式, 得

$$定義域 = (-\infty, \infty)$$

再根據應變數 y 的公式, 當

$$x < 1$$

時,

$$y = 1 - x > 0$$

以及當

$$x \geq 1$$

時,

$$y = \sqrt{x-1} \geq 0$$

得

$$\text{值域} = [0, \infty)$$

(d) 方程式

$$x + y^2 = 1$$

的圖形如下. 由

$$x = 0$$

得

$$y = 1 \text{ 或 } -1$$

乃兩個不同的 y 值, 故不符合函數的定義, 而無法將 y 表示成 x 的函數. 或由鉛垂線檢定法 (vertical line test): 圖形可將 y 表成 x 的函數若且爲若每一鉛垂線最多與圖形有一個交點, 知

$$x + y^2 = 1$$

不會是一個 x 的函數.

四. 一對一函數 (One-to-One Function)

每一應變數的值僅由一個自變數的值所產生, (亦即, 不同自變數的值對應到不同的應變數的值) 的函數, 稱爲一對一函數.

例如, 函數

$$y = 1 + x^2$$

不是一對一函數, 因爲

$$y = 2$$

可由

$$x = -1 \text{ 與 } 1$$

得到, 如圖示. 或由水平線檢定法 (horizontal line test): 函數是一對一若且爲若每一水平線最多與圖形有一個交點, 知

$$y = 1 + x^2$$

不是一對一函數，如圖示.

五．函數表示法

舉例說明，數學式

$$f(x)=\frac{5-x}{3}$$

表示 x 爲自變數，$f(x)$ 爲應變數的值，如

$$f(2)=\frac{5-2}{3}=1$$

例 1．令

$$f(x)=x^2-4x+7$$

試求

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

稱作差商 (difference quotient).

<解> 首先，根據函數的表示法，

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x) &= (x+\Delta x)^2-4(x+\Delta x)+7 \\ &= x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2 \\ &\qquad -4x-4\Delta x+7 \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} &= \frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2-4\Delta x}{\Delta x}\\ &= 2x+\Delta x-4\end{aligned}$$

六. 函數的組合

舉例說明, 令

$$f(x)=2x-3$$

且

$$g(x)=x^2+1$$

則

(i) 加法:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &\stackrel{\text{def}}{=} f(x)+g(x)\\ &= x^2+2x-2\end{aligned}$$

(ii) 減法:

$$\begin{aligned}(f-g)(x) &\stackrel{\text{def}}{=} f(x)-g(x)\\ &= -x^2+2x-4\end{aligned}$$

(iii) 乘法:

$$\begin{aligned}(fg)(x) &\stackrel{\text{def}}{=} f(x)g(x)\\ &= 2x^3+2x-3x^2-3\\ &= 2x^3-3x^2+2x-3\end{aligned}$$

(iv) 除法:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x)}{g(x)}\\ &= \frac{2x-3}{x^2+1}\end{aligned}$$

(v) 合成: 合成函數

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x) &\stackrel{\text{def}}{=} f(g(x))\\ &= f(x^2+1)\\ &= 2(x^2+1)-3\\ &= 2x^2-1\end{aligned}$$

如圖示. 合成函數

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x) &\stackrel{\text{def}}{=} g(f(x))\\ &= g(2x-3)\\ &= (2x-3)^2+1\\ &= 4x^2-12x+10\end{aligned}$$

如圖示. 因此, 一般而言,

$$f \circ g \neq g \circ f$$

七. 反函數 (Inverse Function)

二函數 f 與 g 互爲反函數若對所有 g 的定義域中的 x,

$$f(g(x)) = x$$

且對所有 f 的定義域中的 x,

$$g(f(x)) = x$$

如圖示. 通常將 f 的反函數 g 表示成 f^{-1}.

註 1. 反函數有 ″抵銷″ 的意味, 如圖示.

例如, (a) 函數

$$f(x) = 2x$$

的反函數

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$$

因爲 ″乘 2″ 與 ″除 2″ 互爲逆運算.

(b) 函數

$$f(x) = \frac{1}{3}x$$

的反函數

$$f^{-1}(x) = 3x$$

因為 "除 3" 與 "乘 3" 互為逆運算.

(c) 函數

$$f(x) = x + 4$$

的反函數

$$f^{-1}(x) = x - 4$$

因為 "加 4" 與 "減 4" 互為逆運算.

(d) 函數

$$f(x) = 2x - 5$$

的運算過程為

乘 2, 減 5

故其逆運算為

加 5, 除 2

得反函數

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x+5)$$

(e) 函數

$$f(x) = x^3$$

的反函數

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

因為 "3 次方" 與 "3 次方根" 互為逆運算.

(f) 函數

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

的運算過程為

顛倒, 亦即, 取顛倒數

故其逆運算為

再顛倒一次, 亦即, 再取一次顛倒數

得反函數

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$$

註 2. 反函數與原函數的圖形對稱於直線 $y = x$, 因爲若 (a, b) 在原函數的圖形上若且爲若 (b, a) 在反函數的圖形上, 如下圖所示.

註 3. 只有一對一函數才有反函數, 故可採用水平線檢定法, 判斷一函數是否有反函數.

爲何如此? 若函數非一對一, 如圖示, 則至少存在二數

$$x_1 \neq x_2$$

使得

$$f(x_1) = f(x_2) = y_1$$

因此, 無法定義 $f^{-1}(y_1)$, 因爲有二值 x_1 或 x_2 可選, 無論選誰, 都無法擺平, 不符合函數的定義.

例 2. 試求函數

$$f(x) = \sqrt{2x - 3}$$

的反函數 $f^{-1}(x)$.

<解> (i) 直觀法: 因爲函數 f 的運算過程爲

乘 2, 減 3, 開根號

故其逆運算爲

平方，加 3，除 2

得反函數

$$f^{-1}(x) = \frac{x^2+3}{2}$$

且 f^{-1} 的定義域爲

$$x \geq 0$$

就是 f 的值域，以及 f^{-1} 的值域爲

$$\left[\frac{3}{2}, \infty\right)$$

亦是 f 的定義域，因爲

$$2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$$

(ii) 由定義，如圖示，得

$$f(x) = f(f^{-1}(y)) = y$$

故

$$求\ f^{-1}(y)$$

乃相當於

$$由\ f(x) = y\ 解\ x$$

因此,

(1) 令 $y = f(x)$, 得

$$y = \sqrt{2x-3},\ y \geq 0$$

(2) 解 x: 兩邊平方, 得

$$y^2 = 2x-3,\ y \geq 0$$

由此得,

$$x = \frac{1}{2}(y^2+3),\ y \geq 0$$

亦即

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y^2+3),\ y \geq 0$$

(3) 將 y 換成 x, 得

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x^2+3),\ x \geq 0$$

驗證: 首先, 對於 $x \geq 0$,

$$f(f^{-1}(x)) = \sqrt{2\left(\frac{x^2+3}{2}\right)-3} = \sqrt{x^2} = x$$

又對於 $x \geq \frac{3}{2}$,

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{(\sqrt{2x-3}\,)^2+3}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

因此, 根據反函數的定義,

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x^2+3),\ x \geq 0$$

確實爲

$$f(x) = \sqrt{2x-3},\ x \geq \frac{3}{2}$$

的反函數.