單元 33: 面積與微積分基本定理
(課本 §5.4)

設在閉區間 $[a, b]$ 上, 函數 $f(x) \geq 0$, 且 R 爲 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上所圍成的區域, 如下圖, 則將 R 的面積以數學式

$$\int_a^b f(x)dx$$

表示, 亦即,

$$R \text{ 的面積} = \int_a^b f(x)dx$$

並稱此數學式

$$\int_a^b f(x)dx$$

爲 $f(x)$ 由 a 到 b 的定積分 (definite integral), 其中 a 爲積分下界 (lower limit of integration), b 爲積分上界 (upper limit of integration).

註. 不定積分與定積分之間的差異.

不定積分 (indefinite integral): 若

$$F'(x) = f(x)$$

亦即, $F(x)$ 爲 $f(x)$ 的一個反導函數, 則不定積分

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

乃 $f(x)$ 的反導函數家族.

定積分 (definite integral): 若 $f(x) \geq 0$, 則定積分

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; f(x) \text{ 在 } [a,b] \text{ 上所圍成區域 } R \text{ 的面積}$$

乃一實數.

問. 不定積分與定積分之間有何關係?

答. 由下述的微積分定理 (Fundamental Theorem of Calculus, FTC) 表現出.

令 $x \in [a,b]$. 定義

$$A(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) \text{ 由 } a \text{ 到 } x \text{ 所圍出區域的面積}$$

如圖示.

將 x 增加 Δx, 則面積變化量

$$\Delta A = A(x+\Delta x) - A(x)$$

如圖示.

令

$$f(m) = f \text{ 在 } [x, x+\Delta x] \text{ 上的最小值}$$

且

$$f(M) = f \text{ 在 } [x, x+\Delta x] \text{ 上的最大值}$$

則在 $[x, x+\Delta x]$ 上, ''以 $f(m)$ 爲高的長方形'' 會落在 ''$f(x)$ 所圍出的區域'' 內, 且 ''$f(x)$ 所圍出的區域'' 亦會落在 ''以 $f(M)$ 爲高的長方形'' 內, 如圖示, 以及對應的面積爲

$$\text{小長方形面積} \le \text{區域面積} \le \text{大長方形面積}$$

亦即,

$$f(m)\Delta x \le \Delta A \le f(M)\Delta x$$

同除 Δx, 得

$$f(m) \le \frac{\Delta A}{\Delta x} \le f(M)$$

同取 $\Delta x \to 0$ 的極限, 由上式可導出

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(m) \le \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} \le \lim_{\Delta x\to 0} f(M)$$

因爲當 $\Delta x \to 0$, 由圖示知,

$$f(m) = f(x) = f(M)$$

並根據導函數的定義以及極限的不等式, 上式亦相當於

$$f(x) \leq A'(x) \leq f(x)$$

故,

$$f(x) = A'(x)$$

亦即, $A(x)$ 爲 $f(x)$ 的一個反導函數.

因爲 $F(x)$ 也是 $f(x)$ 的一個反導函數, 且反導函數間只差一個常數, 故

$$A(x) = F(x) + C \tag{1}$$

又

$$\begin{aligned} A(a) &= f(x) \text{ 由 } a \text{ 到 } a \text{ 所圍出區域的面積} \\ &= 0 \end{aligned}$$

代入 (1) 式, 得

$$0 = A(a) = F(a) + C$$

亦即,

$$C = -F(a)$$

因此, 再由 (1) 式,

$$A(x) = F(x) - F(a) \tag{2}$$

最後, 根據 $A(b)$ 的定義, 以及面積的定積分表示法, 並將 b 代入 (2) 式, 得

$$\begin{aligned} A(b) &= f(x) \text{ 由 } a \text{ 到 } b \text{ 所圍出區域的面積} \\ &= \int_a^b f(x)dx \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

結論. 微積分基本定理. 若不定積分

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

亦即,

$$F'(x) = f(x)$$

或 $F(x)$ 爲 $f(x)$ 的一個反導函數, 則定積分

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

也就是說, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定積分, 或所圍出區域的面積 (當 $f(x) \geq 0$ 時), 就等於 $f(x)$ 的不定積分, 或一個反導函數, 在 b 與 a 值的差.

例 1 試求下列各項定積分.

(a) $\int_0^2 2x dx$

(b) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$

<解> (a) 方法 1: 面積的觀點. 因為在 $[0,2]$ 上,

$$y = 2x \geq 0$$

故定積分

$$\begin{aligned} \int_0^2 2x dx &= \text{底為 2, 高為 4 的直角三角形} \\ &\quad \text{面積, 如圖示} \\ &= \frac{1}{2}(2)(4) = 4 \end{aligned}$$

方法 2: FTC 的觀點. 先求不定積分, 得

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

接著, 取

$$F(x) = x^2$$

並根據微積分基本定理, 定積分

$$\begin{aligned}\int_0^2 2x dx &= F(2) - F(0) \\ &= (2)^2 - (0)^2 = 4\end{aligned}$$

與方法 1 的結果相符.

(b) 因爲在 $[0, 2]$ 上,

$$y = \sqrt{4 - x^2} \geq 0$$

且經由平方, 乃相當於

$$y^2 = 4 - x^2,\ x \in [0, 2],\ y \geq 0$$

亦即,

$$x^2 + y^2 = 4,\ x \in [0, 2],\ y \geq 0$$

故爲一個以 $(0, 0)$ 爲圓心, 半徑爲 2 的四分之一圓, 如圖示.

令 R 爲此四分之一圓在 $[0, 2]$ 上所圍出的區域, 則定積分

$$\begin{aligned}\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx &= R \text{ 的面積} \\ &= \frac{1}{4}\pi(2)^2 = \pi\end{aligned}$$

註. 此題無法以 FTC 的觀點求定積分, 因爲至目前爲止無法求得不定積分

$$\int \sqrt{4-x^2}dx$$

事實上, 需以反三角函數的積分法求此不定積分, 這是超出本書的範圍, 故僅於下學期以查表的方式介紹此不定積分的結果.

註 1. 微積分基本定理的推廣. 設函數 $f(x)$ 在閉區間 $[a, b]$ 上連續 (不一定要大於或等於 0), 且

$$F'(x) = f(x)$$

亦即, $F(x)$ 爲 $f(x)$ 的不定積分或反導函數, 則定積分

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

此時定積分

$$\int_a^b f(x)dx$$

可爲一正數, 負數, 或 0, 所以不一定代表 f 所圍出區域的面積.

注意, 只有當 $f(x) \geq 0$ 時, 定積分

$$\int_a^b f(x)dx = \text{所圍出區域的面積}$$

註 2. 簡易表示法: 若

$$F'(x) = f(x)$$

則定積分

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

例 2. 式求下列各項定積分.

(a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} xe^{x^2}dx$

(b) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx$

(c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}dx$

(d) $\displaystyle\int_0^2 |2x-1|dx$

<解> 因爲被積函數均爲連續函數, 故根據微積分基本定理, 需先以型式辨識或代入法求出不定積分, 再計算此不

定積分在積分上下界的值的差, 如下述. (a) 因爲被積函數中的合成函數爲

$$e^{x^2}$$

故令

$$u = x^2$$

得

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

再經由同乘除 2, 相關的積分規則, 以及註 2 的簡易表示法, 得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \underbrace{e^{x^2}}_{e^u}\underbrace{(2x)}_{\frac{du}{dx}}\,dx \\
&= \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^{\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{(\sqrt{3})^2} - e^{(0)^2}\right] \\
&= \frac{1}{2}(e^3 - 1)
\end{aligned}$$

注意!在第二個等號的右邊一定要將不定積分表成 x 後, 才可代入積分的上下界, 而求出正確的定積分, 此乃因爲

積分的上下界乃是 x 的範圍，不是 u 的範圍，只能代入以 x 表示的不定積分內，切勿犯如下的錯誤，

$$\begin{aligned}
\text{原式} &\neq \frac{1}{2}e^u\Big|_0^{\sqrt{3}} \\
&\neq \frac{1}{2}(e^{\sqrt{3}} - e^0) \\
&\neq \frac{1}{2}(e^{\sqrt{3}} - 1)
\end{aligned}$$

(b) 因爲被積函數中含有 $\ln x$ 與 $\frac{1}{x}$，故根據積分的經驗，令

$$u = \ln x$$

得

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

再經由適當的改寫，以及型式辨識或代入法，得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_e^{e^2} \underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{\frac{1}{u}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\frac{du}{dx}}\, dx \\
&= \ln|\ln x|\Big|_e^{e^2} \\
&= \ln(\ln e^2) - \ln(\ln e) = \ln 2 - \ln 1 \\
&= \ln 2
\end{aligned}$$

(c) 顯然地，被積函數中的合成函數爲

$$\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}$$

故令

$$u = 1 + 2x^2$$

得

$$\frac{du}{dx} = 4x$$

剛好是被積函數其餘部份 x 的 4 倍.

因此，經由同乘除 4，型式辨識，以及相關的積分規則，並將不定積分表成 x 的數學式子後，再代入積分上下界，則可得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{4}\int_0^2 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}}_{\frac{1}{\sqrt{u}}} \underbrace{(4x)}_{\frac{du}{dx}} dx \\
&= \frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{1+2x^2}\Big|_0^2 \\
&= \frac{1}{2}(\sqrt{9}-\sqrt{1}) = \frac{1}{2}(3-1) = 1
\end{aligned}$$

(d) 方法 1：FTC 的觀點. 因爲所介紹的積分公式中的被積函數均未含有絕對值符號，故需先以明確的數學式表

示出被積函數後, 再根據各自數學式所對應的範圍, 分段地計算出定積分的和, 如下述.

首先,

$$|2x-1| = \begin{cases} 1-2x, & x < \frac{1}{2}, \\ 2x-1, & x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

接著, 根據 $|2x-1|$ 在上式 $\frac{1}{2}$ 左右兩邊不同的表示式, 將原積分範圍 $[0,2]$, 分割成兩段 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 與 $\left[\frac{1}{2},2\right]$, 並分別求在各段上去絕對值符號後的定積分的和, 而得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^{1/2} |2x-1|dx + \int_{1/2}^2 |2x-1|dx \\ &= \int_0^{1/2} (1-2x)dx + \int_{1/2}^2 (2x-1)dx \\ &= \left(x - x^2\Big|_0^{1/2}\right) + \left(x^2 - x\Big|_{1/2}^2\right) \\ &= \left(\frac{1}{4} - 0\right) + \left[2 - \left(-\frac{1}{4}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

方法 2: 面積的觀點. 因爲被積函數

$$|2x-1| \geq 0$$

故定積分

$$\begin{aligned}\int_0^2 |2x-1|dx &= \text{在 } [0,2] \text{ 上所圍出的兩個三角形} \\ &\quad \text{的面積和, 如圖示} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)(1)+\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2}\right)(3) \\ &= \frac{1}{4}+\frac{9}{4}=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

與方法 1 的結果相符. 不強制使用某特定的方法, 可根據題目靈活的運用便於求解的方法, 但需謹記只有在被積函數爲非負時, 定積分才可表示成所圍出區域的面積.

應用 1: 邊際分析 (marginal analysis). 已知收益 $R(x)$, 問銷售量由 x_1 到 x_2 時, 收益的變化爲何?

將銷售量代入收益, 得收益的變化爲

$$R(x_2)-R(x_1)$$

若收益 $R(x)$ 未知, 但已知變際收益 (marginal revenue) $\frac{dR}{dx}$, 如何回答上述問題?

因爲收益 $R(x)$ 是邊際收益 $\frac{dR}{dx}$ 的一個反導函數, 故由微積分基本定理, 邊際收益的定積分

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{dR}{dx}dx=R(x)\Big|_{x_1}^{x_2}=R(x_2)-R(x_1)$$

剛好就是收益的變化, 如所求.

同理, 邊際利潤的定積分

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dP}{dx} dx = P(x_2) - P(x_1)$$

就是利潤的變化, 且邊際成本的定積分

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dC}{dx} dx = C(x_2) - C(x_1)$$

就是成本的變化.

例 3. 設邊際利潤

$$\frac{dP}{dx} = -0.0005x + 12.2$$

試求當銷售量由 100 件增至 110 件時的利潤變化量.

<解> 根據上述的應用 1, 利潤變化量

$$\begin{aligned} P(110) - P(100) &= \int_{100}^{110} \frac{dP}{dx} dx \\ &= \int_{100}^{110} (-0.0005x + 12.2) dx \\ &= -\frac{1}{2}(0.0005)x^2 + 12.2x \Big|_{100}^{110} \\ &= [-0.00025(110)^2 + 12.2(110)] - \\ &\quad [-0.00025(100)^2 + 12.2(100)] \approx 121.48 \end{aligned}$$

應用 2: 平均值 (average value). 設函數 $f(x)$ 在閉區間 $[a,b]$ 上連續, 則 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的

$$\text{平均值} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

爲何如此? 簡單說明如下, 設 a 與 b 爲整數, $f(x) \geq 0$, 且在 $[a,b]$ 上分割出 $(b-a)$ 個寬度爲 1, $f(x)$ 在子區間左端點的值爲高的長方條, 如圖示. 則根據定積分的面積觀點, 定積分

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \text{圍出區域的面積}\\ &\approx (b-a) \text{ 個長方條面積和}\\ &= f(a)+f(a+1)+\cdots+f(b-1)\end{aligned}$$

接著, 將上式同除 $(b-a)$, 得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\\ &\approx \frac{1}{b-a}[f(a)+f(a+1)+\cdots+f(b-1)]\\ &= (b-a) \text{ 個 } f \text{ 值的平均值}\end{aligned}$$

故稱

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

爲 f 在 $[a,b]$ 上的平均值.

例 4. 設函數

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

試求 f 在 $[1,3]$ 上的平均值.

<解> 根據函數在閉區間上的平均值定義, 微積分基本定理, 以及簡單積分對數律,

$$\begin{aligned}
\text{平均值} &= \frac{1}{3-1}\int_1^3 \frac{1}{x}dx \\
&= \frac{1}{2}\ln x\Big|_1^3 \\
&= \frac{1}{2}(\ln 3-\ln 1)=\frac{1}{2}\ln 3
\end{aligned}$$

應用 3: 偶函數 (even function). 對稱於 y-軸的函數 f, 稱爲偶函數, 若且爲若

$$f(-x)=f(x)$$

如圖示. 性質爲, 對於 $a\geq 0$,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$$

例如, 函數

$$f(x) = x^2$$

爲偶函數, 因爲

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

故根據定義, 確實爲一偶函數, 如圖示.

又

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} x^2 dx &= \frac{1}{3}x^3\Big|_{-2}^{2} \\ &= \frac{1}{3}[2^3 - (-2)^3] \\ &= \frac{1}{3}(8+8) \\ &= \frac{16}{3}\end{aligned}$$

且

$$\int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^2 = \frac{8}{3}$$

故得

$$\int_{-2}^{2} x^2 dx = 2\int_0^2 x^2 dx$$

如性質所述.

應用 4: 奇函數 (odd function). 對稱於原點的函數 f, 稱為奇函數, 若且為若

$$f(-x) = -f(x)$$

如圖示. 性質為, 對於 $a \geq 0$,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

例如, 函數

$$f(x) = x^3$$

為奇函數, 因為

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

故根據定義, 確實為一奇函數, 如圖示.

又

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} x^3 dx &= \frac{1}{4}x^4\Big|_{-2}^{2} \\
&= \frac{1}{4}[2^4 - (-2)^4] \\
&= \frac{1}{4}(16 - 16) \\
&= 0
\end{aligned}$$

如性質所述.