

## 單元 32: 指數與對數積分

(課本 §5.3)

令  $u$  為  $x$  的可微函數.

(1) 簡單積分指數律:

$$\int e^x dx = e^x + C$$

此乃因為

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

故根據不定積分的定義得證.

(2) 廣義積分指數律: 對於指數函數的合成函數,

$$\int e^u \frac{du}{dx} dx = \int e^u du = e^u + C$$

其中第一個與第二個等號成立乃是先根據代入法的原則, 將  $\frac{du}{dx} dx$  表成微分式  $du$ , 形成對  $u$  的積分, 再根據 (1) 的指數積分所致.

(3) 簡單積分對數律:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C, x \neq 0$$

此乃因為當  $x > 0$  時,

$$\frac{d}{dx}[\ln |x|] = \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \quad (1)$$

又當  $x < 0$  時,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[\ln |x|] &= \frac{d}{dx} \ln(-x) \\ &= \frac{1}{-x} \cdot (-x)' \\ &= \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} \end{aligned} \quad (2)$$

故當  $x \neq 0$  時, 由 (1) 式與 (2) 式知,

$$\frac{d}{dx}[\ln |x|] = \frac{1}{x}$$

因而根據不定積分的定義得證.

(4) 廣義積分對數律: 對於  $\frac{1}{x}$  的合成函數,

$$\int \frac{1}{u} \frac{du}{dx} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C$$

此乃因為根據代入法, 先將  $\frac{du}{dx} dx$  表成微分式  $du$ , 形成對  $u$  的積分, 再由 (3) 的簡單積分對數律所致.

例 1. 試求下列各項不定積分.

$$(a) \int 3e^x dx$$

$$(b) \int 5e^{5x} dx$$

$$(c) \int 2e^{5x+2} dx$$

$$(d) \int 3xe^{-x^2+1} dx$$

<解> (a) 因為被積函數為一單純的指數函數的 3 倍, 故根據積分的常數乘法規則以及簡單積分指數律, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 3 \int e^x dx \\ &= 3(e^x + C) \\ &= 3e^x + 3C = 3e^x + C \end{aligned}$$

其中最後一個等號成立乃因為  $3C$  亦是代表任意常數, 故為簡化起見, 均以  $C$  表示, 且以下均按照此約定.

(b) 因為被積函數中的合成函數為

$$e^{5x}$$

故根據型式辨識法或代入法, 令

$$u = 5x$$

並經由適當的改寫, 以及廣義積分指數律, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \underbrace{e^{5x}}_{e^u} \underbrace{(5)}_{\frac{du}{dx}} dx \\ &= \int e^u du \\ &= e^u + C = e^{5x} + C \end{aligned}$$

(c) 因為被積函數中的合成函數為

$$e^{5x+2}$$

故根據型式辨識法或代入法, 視  $5x + 2$  為  $u$ , 並經由同乘除 5 的適當改寫, 積分的常數乘法規則, 以及廣義積分指數律, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{2}{5} \underbrace{e^{5x+2}}_{e^u} \underbrace{(5)}_{\frac{du}{dx}} dx \\ &= \frac{2}{5} e^{5x+2} + C \end{aligned}$$

(d) 顯然地, 被積函數中的合成函數為

$$e^{-x^2+1}$$

故根據型式辨識法或代入法, 令

$$u = -x^2 + 1$$

得

$$\frac{du}{dx} = -2x$$

並經由同乘除  $(-2)$  的改寫, 積分的常數乘法規則, 以及廣義積分指數律, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int -\frac{3}{2} \underbrace{e^{-x^2+1}}_{e^u} \underbrace{(-2x)}_{\frac{du}{dx}} dx \\ &= -\frac{3}{2} e^{-x^2+1} + C \end{aligned}$$

例 2. 試求下列各項不定積分.

(a)  $\int \frac{7}{x} dx$

(b)  $\int \frac{2x}{x^2} dx$

(c)  $\int \frac{2}{4x+5} dx$

$$(d) \int \frac{7x}{1-x^2} dx$$

<解> (a) 因為被積函數是單純的  $\frac{1}{x}$  的 7 倍, 故根據積分的常數乘法規則, 以及簡單積分對數律, 得

$$\text{原式} = 7 \int \frac{1}{x} dx = 7 \ln |x| + C$$

(b) 當被積函數是一分式, 且分母的導函數是分子的常數倍時, 可根據型式辨識法或代入法, 將分母視為  $u$ , 形成合成函數

$$\frac{1}{u}$$

再經由適當的改寫, 積分的常數乘法規則, 以及廣義積分對數律, 如

$$u = x^2$$

得

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

以及

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\frac{1}{u}} \underbrace{(2x)}_{\frac{du}{dx}} dx \\ &= \ln |u| + C = \ln x^2 + C \end{aligned}$$

其中最後一個等號成立乃因為  $x^2 > 0$ , 故可去絕對值符號, 但不可再經由對數律化簡為  $2 \ln x + C$ , 因為如此則限制  $x$  的範圍為大於 0, 而實際上  $x$  不等於 0 即可.

(c) 因為被積函數為一分式, 且明顯地分母的導函數是分子的常數倍, 故根據型式辨識法或代入法, 令

$$u = 4x + 5$$

並經由同乘除 4 的適當改寫, 積分的常數乘法規則, 以及廣義積分對數律, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{2}{4} \cdot \underbrace{\frac{1}{4x+5}}_{\frac{1}{u}} \underbrace{(4)}_{\frac{du}{dx}} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln |4x + 5| + C \end{aligned}$$

(d) 令

$$u = 1 - x^2$$

得

$$\frac{du}{dx} = -2x$$

為被積函數的分子的常數倍, 故根據型式辨識法或代入法, 經由同乘除  $(-2)$  的改寫, 積分的常數乘法規則, 以及廣

義積分對數律, 得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int -\frac{7}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-x^2}}_{\frac{1}{u}} \underbrace{(-2x)}_{\frac{du}{dx}} dx \\ &= -\frac{7}{2} \ln |1-x^2| + C\end{aligned}$$

例 3. 試求下列各項不定積分.

$$(a) \int \frac{x^2 + 6x + 1}{x^2 + 1} dx$$

$$(b) \int \frac{4x^2 - 2x + 3}{x^2} dx$$

$$(c) \int \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} dx$$

<解> 被積函數均為分子的次方大於或等於分母的次方的有理函數, 一個處理的原則是, 先經由長除法將原被積函數改寫為多項式與真分式的和後, 再經由逐項積分, 積分的幕次規則, 以及廣義積分對數律求不定積分, 如下述.



(a) 經由長除法, 得

$$\frac{x^2 + 6x + 1}{x^2 + 1} = 1 + \frac{6x}{x^2 + 1}$$

故令

$$u = x^2 + 1$$

得

$$du = (x^2 + 1)' dx = 2x dx$$

兩邊同除 2, 得

$$x dx = \frac{1}{2} du$$

接著, 根據長除法的結果, 逐項積分, 改寫, 代入, 化簡, 積分的常數乘法規則, 以及積分的對數律, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \left( 1 + \frac{6x}{x^2 + 1} \right) dx \\ &= \int 1 dx + \int \frac{6}{x^2 + 1} \cdot x dx \\ &= x + \int \frac{6}{u} \cdot \frac{1}{2} du \\ &= x + 3 \int \frac{1}{u} du \\ &= x + 3 \ln |u| + C \\ &= x + 3 \ln(x^2 + 1) + C \end{aligned}$$

(b) 因為分母只有一項, 故先根據分配律改寫被積函數後, 再經由逐項積分, 積分的常數乘法規則, 簡單積分對數律, 以及簡單幕次規則, 得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \left( 4 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right) dx \\ &= 4x - 2 \ln |x| + 3(-1)x^{-1} + C \\ &= 4x - 2 \ln |x| - \frac{3}{x} + C\end{aligned}$$

(c) 首先, 經由長除法, 以及逐項積分, 得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \left( x + 2 + \frac{3}{x-1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 \int \frac{1}{x-1} dx \quad (3)\end{aligned}$$

接著, 令

$$u = x - 1$$

得

$$du = (x - 1)' dx = dx$$

並經由代入, 以及簡單積分對數律, 得

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x-1} dx &= \int \frac{1}{u} du \\ &= \ln |u| + C \\ &= \ln |x-1| + C \quad (4)\end{aligned}$$

最後, 合併 (3) 式與 (4) 式, 得

$$\text{原式} = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 \ln|x - 1| + C$$

例 4. 試求下列各項不定積分.

$$(a) \int \frac{1}{2 + e^{-x}} dx$$

$$(b) \int \frac{1 + e^{-x}}{1 + xe^{-x}} dx$$

$$(c) \int \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$$

<解> (a) 雖然被積函數是一分式, 根據上述經驗, 一個嘗試是令分母為  $u$ , 並將被積函數的其餘部分與  $dx$  表成  $du$  的常數倍, 再根據簡單積分對數律求不定積分, 亦即,

$$u = 2 + e^{-x}$$

但

$$du = (2 + e^{-x})' dx = -e^{-x} dx$$

無法表成其餘部分  $1dx$  的常數倍, 故代入法或更明確的簡單積分對數律不適用, 而需嘗試其它方法.

一個方式是分母分子同乘  $e^x$ , 並整理, 得

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2 + e^{-x}} dx &= \int \frac{e^x \cdot 1}{e^x(2 + e^{-x})} dx \\ &= \int \frac{e^x}{2e^x + 1} dx\end{aligned}\quad (5)$$

接著, 令

$$u = 2e^x + 1$$

得

$$du = (2e^x + 1)' dx = 2e^x dx$$

剛好是其餘部分  $e^x dx$  的 2 倍. 故, 由 (5) 式, 根據辨識法或代入  $u$  與

$$e^x dx = \frac{1}{2} du$$

並根據積分的常數乘法規則, 以及簡單積分對數律, 得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{2} du \\ &= \frac{1}{2} \ln |u| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln(2e^x + 1) + C\end{aligned}$$

其中最後一個等號成立乃因為  $2e^x + 1$  恆為正, 而可去絕對值所致.

(b) 同 (a), 先嘗試令

$$u = 1 + xe^{-x}$$

則

$$\begin{aligned} du &= [0 + (x)'e^{-x} + x(e^{-x})']dx \\ &= (1 - x)e^{-x}dx \end{aligned}$$

無法表成其餘部分  $(1 + e^{-x})dx$  的常數倍. 故嘗試分子分母同乘  $e^x$ , 並整理, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{e^x(1 + e^{-x})}{e^x(1 + xe^{-x})}dx \\ &= \int \frac{e^x + 1}{e^x + x}dx \end{aligned} \quad (6)$$

接著, 令

$$u = e^x + x$$

得

$$du = (e^x + 1)dx$$

剛好就是被積函數其餘部分  $(e^x + 1)dx$ .

所以, 由 (6) 式, 將  $u$  與  $du$  代入, 並根據簡單積分對數律, 得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \frac{1}{u} du \\ &= \ln |e^x + x| + C\end{aligned}$$

(c) 一個積分經驗乃是, 當被積函數中含有  $(\ln x)^n$  與  $\frac{1}{x}$  時, 則可透過它們的關係

$$\frac{d}{dx} [\ln x] = \frac{1}{x}$$

令

$$u = \ln x$$

得

$$du = \frac{1}{x} dx$$

並經由代入, 整理, 得出

$$u^n$$

再根據積分的簡單幕次規則求不定積分, 如下述.

因為被積函數可改寫成

$$\frac{1}{(\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x}$$

符合上述的經驗, 故令

$$u = \ln x$$

得

$$du = \frac{1}{x} dx$$

再經由代入, 並根據積分的簡單冪次規則, 得

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(\ln x)^2} dx &= \int \frac{1}{u^2} du \\ &= -u^{-1} + C \\ &= -\frac{1}{\ln x} + C \end{aligned}$$