單元 31: 廣義冪次規則
(課本 §5.2)

複習. 簡單冪次規則爲, 對於 $n \neq -1$,

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

問. 不定積分

$$\int 2x(x^2+1)^3 dx$$

爲何?

答. 因爲被積函數含有 (x^2+1) 的 3 次方項, 根據不定積分或反導函數的定義, 不定積分應含有 (x^2+1) 的 4 次方項, 故根據微分的廣義冪次規則, 先考慮

$$\frac{d}{dx}\left[(x^2+1)^4\right] = 4(x^2+1)^3 (2x)$$

接著, 將上式兩邊同除以 4, 得

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4}(x^2+1)^4\right] = 2x(x^2+1)^3$$

剛好就是被積函數.

因此, 由不定積分的定義,

$$\int 2x(x^2+1)^3 dx = \frac{1}{4}(x^2+1)^4 + C$$

另類觀點: 根據上述的推導, 關鍵點乃在於 (x^2+1) 這一項的次方, 由 3 經由反微分的過程增爲 4, 故令

$$u = x^2 + 1$$

得

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

並代入原不定積分, 整理, 且根據微分式

$$du = \frac{du}{dx} dx$$

以及積分的簡單冪次規則, 得

$$\begin{aligned}
\int 2x(x^2+1)^3 dx &= \int (x^2+1)^3 (2x) dx \\
&= \int u^3 \frac{du}{dx} dx \\
&= \int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 + C \\
&= \frac{1}{4}(x^2+1)^4 + C
\end{aligned}$$

其中最後一個等式乃將 u 反代爲 (x^2+1), 表成 x 的式子.

根據上述的代入以及微分式的引用, 可推廣出下述的廣義冪次規則.

廣義冪次規則.

設 u 爲 x 的可微函數, 則對於 $n \neq -1$,

$$\int u^n \frac{du}{dx} dx = \int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C$$

問. 如何使用廣義冪次規則?

答. (i) 型式辨識 (pattern recognition).

重點乃在於辨識出被積函數中的一部分爲 u, 其餘的部分爲 $\frac{du}{dx}$ 的常數倍數, 再根據廣義冪次規則, 得出不定積分. 通常將被積函數中合成函數的內部函數視爲 u, 再設法將其餘的部分表成 $\frac{du}{dx}$ 的某一倍數, 以例說明如下.

例 1. 試求下列各項不定積分.

(a) $\int 3x^2\sqrt{x^3-2}dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{-4x}{(1-2x^2)^2}dx$

(c) $\displaystyle\int (2x+1)(x^2+x)dx$

(d) $\displaystyle\int x(3-4x^2)^2dx$

(e) $\displaystyle\int 2(x^2+1)^2dx$

<解> (a) 因爲被積函數中的合成函數部分爲

$$\sqrt{x^3-2}$$

故根據上述型式辨識的原則, 視 (x^3-2) 爲 u, 並將被積函數的合成函數部分表成

$$(\text{函數})^n$$

的型式, 再由廣義冪次規則, 得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \underbrace{(x^3-2)^{1/2}}_{u^{1/2}}\underbrace{(3x^2)}_{\frac{du}{dx}}dx \\ &= \frac{2}{3}(x^3-2)^{3/2}+C\end{aligned}$$

(b) 首先，可辨識出合成函數的部分爲

$$(1-2x^2)^{-2}$$

故根據型式辨識的原則，視 $(1-2x^2)$ 爲 u，並經由適當的改寫，以及廣義冪次規則，得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \underbrace{(1-2x^2)^{-2}}_{u^{-2}} \underbrace{(-4x)}_{\frac{du}{dx}}\, dx \\
&= -(1-2x^2)^{-1} + C
\end{aligned}$$

(c) 雖然被積函數中沒有明顯的合成函數部分，但兩項的乘積中，$(2x+1)$ 項爲 (x^2+x) 項的導函數，故可視 (x^2+x) 爲 u，並經由適當的改寫，以及廣義冪次規則，得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \underbrace{(x^2+x)}_{u} \underbrace{(2x+1)}_{\frac{du}{dx}}\, dx \\
&= \frac{1}{2}(x^2+x)^2 + C
\end{aligned}$$

(d) 由題目可辨識出被積函數中合成函數的部分爲

$$(3-4x^2)^2$$

故根據型式辨識的原則，視 $(3-4x^2)$ 爲 u，並得

$$\frac{du}{dx} = -8x$$

但卻不是被積函數中其餘的部分 x, 而差一個 (-8) 的常數倍數, 故可經由乘以一個 (-8), 再除以一個 (-8) 的適當改寫, 形成 $\frac{du}{dx}$, 再根據積分的常數乘法規則以及廣義冪次規則, 得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \left(-\frac{1}{8}\right) \underbrace{(3-4x^2)^2}_{u^2} \underbrace{(-8x)}_{\frac{du}{dx}} dx \\
&= -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3}(3-4x^2)^3 + C \\
&= -\frac{1}{24}(3-4x^2)^3 + C
\end{aligned}$$

(e) 先做一個錯誤的示範, 因爲合成函數的部分爲

$$(x^2+1)^2$$

故一個與前述各項解題經驗一致的作法爲, 視 (x^2+1) 爲 u, 並同乘除一個 x, 形成 $\frac{du}{dx}$ 後, 得

$$\text{原式} = \int \frac{1}{x} \underbrace{(x^2+1)^2}_{u^2} \underbrace{(2x)}_{\frac{du}{dx}} dx$$

因爲上式經由辨識及改寫後的被積函數內有一含 x 的項, 不符合廣義冪次規則

$$\int u^n \frac{du}{dx} dx = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C$$

中被積函數型式的要求, 只可含 u^n 項, $\frac{du}{dx}$ 項, 以及 dx 項, 故廣義冪次規則不適用, 而應改用其他的方法, 切勿將含有 x 的項提出積分符號外, 錯誤地使用廣義冪次規則, 如

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &\neq \frac{1}{x}\int \underbrace{(x^2+1)^2}_{u^2}\underbrace{(2x)}_{\frac{du}{dx}}dx \\
&\neq \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{3}(x^2+1)^3+C
\end{aligned}
$$

再次地提醒, 根據積分的常數乘法規則, 只可將乘積中的常數提出積分符號外, 絕對不可將含 x 的項提出來, 如上述的錯誤示範. 另外, 經辨識改寫後, 只有在被積函數中不含 x 項, 亦即, 符合廣義冪次規則中被積函數型式的要求下, 才可使用廣義冪次規則, 切勿任意地誤用, 如上述的錯誤示範, 而應改用其他的正確方法, 如下述.

因爲被積函數內有一個平方項, 次方不大, 故可將被積函數展開, 形成一個多項式, 再根據簡單冪次規則逐項積分, 得

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int(2x^4+4x^2+2)dx \\
&= \frac{2}{5}x^5+\frac{4}{3}x^3+2x+C
\end{aligned}
$$

(ii) 代入法 (substitution) 或變數變換 (change of variable).

重點乃在於將原被積函數的 x 與 dx，經由適當的代入及微分式的引用，而轉換成 u 與 du 後，再根據簡單冪次規則積分，如令

$$u = f(x)$$

得微分式

$$du = f'(x)dx$$

並代入，再根據簡單冪次規則，對於 $n \neq -1$，得

$$\begin{aligned}\int \underbrace{[f(x)]^n}_{u^n} \underbrace{f'(x)dx}_{du} &= \int u^n du \\ &= \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C \\ &= \frac{1}{n+1} [f(x)]^{n+1} + C\end{aligned}$$

其中最後一個等號乃是反代入，將積分的結果表成 x 的數學式，符合原題意的要求，找一個以 x 爲自變數的函數.

如同型式辨識法，通常取被積函數中合成函數部分的內部函數爲 u，並將其餘的部分表成微分式 du 的常數倍數，在完全改寫成 u 與 du 的型式，不可含有任何 x 的式子後，才可根據簡單冪次規則求積分，說明如下.

例 2. 試求下列各項不定積分.

(a) $\int \sqrt{1-3x}dx$

(b) $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x+4}}dx$

(c) $\int x^2(1-x^3)^{51}dx$

<解> (a) 因爲被積函數中的合成函數爲

$$\sqrt{1-3x}$$

故令

$$u = 1-3x$$

得微分式

$$du = (1-3x)'dx = -3dx$$

由此得其餘的部分

$$dx = -\frac{1}{3}du$$

將 u 與 dx 代入, 得

$$\text{原式} = \int u^{1/2}\left(-\frac{1}{3}\right)du$$

因爲已將原式換成只含 u 與 du 的型式, 不含任何 x 的式子, 故根據積分的常數乘法規則, 以及簡單冪次規則, 得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= -\frac{1}{3}\int u^{1/2}du \\
&= -\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}+C \\
&= -\frac{2}{9}(1-3x)^{3/2}+C
\end{aligned}$$

除了上述以 dx 代入的方式外, 也可採用類似型式辨識的方法, 適當地調整常數乘積, 將其餘的部分表成 du 的常數倍, 如乘以一個 (-3), 再除以一個 (-3), 得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int\left(-\frac{1}{3}\right)(1-3x)^{1/2}(-3)dx \\
&= -\frac{1}{3}\int u^{1/2}du \\
&= -\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}+C \\
&= -\frac{2}{9}(1-3x)^{3/2}+C
\end{aligned}$$

自行選擇一個適合自己的方式即可, 不做方法上的強制.

(b) 明顯地, 被積函數中的合成函數爲

$$(x^3+3x+4)^{-1/2}$$

故令

$$u = x^3 + 3x + 4$$

得

$$\begin{aligned} du &= (x^3 + 3x + 4)' dx \\ &= (3x^2 + 3) dx \\ &= 3(x^2 + 1) dx \end{aligned}$$

兩邊同除 3, 得其餘的部分

$$(x^2 + 1) dx = \frac{1}{3} du$$

代入, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int (x^3 + 3x + 4)^{-1/2} (x^2 + 1) dx \\ &= \int u^{-1/2} \left(\frac{1}{3}\right) du \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2u^{1/2} + C \\ &= \frac{2}{3} (x^3 + 3x + 4)^{1/2} + C \end{aligned}$$

(c) 由題目可觀察出被積函數中的合成函數爲

$$(1 - x^3)^{51}$$

故令

$$u = 1 - x^3$$

得

$$du = -3x^2 dx$$

兩邊同除 -3, 得其餘的部分

$$x^2 dx = -\frac{1}{3} du$$

將 u 與上式代入, 得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int (1 - x^3)^{51} x^2 dx \\
&= \int u^{51} \left(-\frac{1}{3}\right) du \\
&= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{52} u^{52} + C \\
&= -\frac{1}{156} (1 - x^3)^{52} + C
\end{aligned}$$