單元 25: 自然指數函數
(課本 §4.2)

一. 定義

以無理數

$$\begin{aligned} e &\overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} \\ &\approx 2.71828182846\cdots \end{aligned}$$

爲底數的指數函數

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} e^x$$

稱作自然指數函數 (natural exponential function).

二. 圖形

因爲底數 $e > 1$, 故圖形如下, 得自然指數函數爲一定義域爲 $(-\infty, \infty)$, 值域爲 $(0, \infty)$, 經過 (0,1) 的遞增, 上凹, 一對一, 連續的函數, 且

$$\lim_{x\to\infty} e^x = e^{\infty} = \infty$$

以及

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = e^{-\infty} = 0$$

三. 應用

(i) 模型化族群成長 (modeling the growth of a population)

情況 1. 無限制成長 (growth not restricted): 在 t 時的族群大小

$$f(t) = ae^{kt}$$

稱作指數模型 (exponential model), 圖形如下, 其中 $a > 0$ 爲最初的族群大小, $k > 0$ 爲一固定的成長率, 以及

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = ae^{\infty} = a(\infty) = \infty$$

顯示出在長期演變下, 族群的大小會無限制的增加, 故爲無限制成長.

情況 2. 限制成長 (growth restricted): 在 t 時的族群大小

$$f(t) = \frac{a}{1 + be^{-kt}}$$

稱作羅吉斯模型 (logistic model, 圖形如下, 其中 a, b, k 均爲大於 0 的常數, 且

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \frac{a}{1 + be^{-\infty}} = \frac{a}{1 + b \cdot 0} = a$$

由此得水平漸近線

$$y = a$$

表示在長期的演變下, 族群的大小會愈來愈接近 a, 並以 a 爲一上界, 故爲限制型成長, 以及

$$\lim_{t \to -\infty} f(t) = \frac{a}{1 + be^{\infty}} = \frac{a}{\infty} = 0$$

由此得水平漸近線

$$y = 0$$

表示回溯至無限遠的起源時, 族群大小愈來愈接近 0.

例如, 細菌培養皿中, 細菌的重量

$$y = \frac{1.25}{1 + 0.25e^{-0.4t}}, \ t \geq 0$$

乃一羅吉斯模型, 且

(1) $t = 0$ 時,

$$y = \frac{1.25}{1 + 0.25e^{0}} = \frac{1.25}{1 + 0.25} = 1 \text{ (克)}$$

(2) $t = 10$ 時,

$$y = \frac{1.25}{1 + 0.25e^{-4}} \approx 1.244 \text{ (克)}$$

(3) $t \to \infty$ 時,

$$\begin{aligned} y &= \lim_{t\to\infty} \frac{1.25}{1+0.25e^{-0.4t}} = \frac{1.25}{1+0.25e^{-\infty}} \\ &= \frac{1.25}{1+0.25\cdot 0} = 1.25 \text{ (克)} \end{aligned}$$

(ii) 複利 (compound interest)

設本金爲 P, 年利率爲 r, 且一年內計算複利的次數爲 n, 則 t 年後的結餘 (balance, 又稱作本利和)

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{tn}$$

爲何如此? 因爲一年計算 n 次複利, 故每次計算複利時的利率爲

$$\frac{r}{n}$$

因此, 第一次計算複利後的結餘爲

$$A = P + P\cdot\frac{r}{n} = P\left(1+\frac{r}{n}\right)$$

第二次計算複利後的結餘爲

$$\begin{aligned} A &= P\left(1+\frac{r}{n}\right) + P\left(1+\frac{r}{n}\right)\cdot\frac{r}{n} \\ &= P\left(1+\frac{r}{n}\right)\left(1+\frac{r}{n}\right) = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^2 \end{aligned}$$

第三次計算複利後的結餘為

$$\begin{aligned}A &= P\left(1+\frac{r}{n}\right)^2 + P\left(1+\frac{r}{n}\right)^2 \cdot \frac{r}{n}\\ &= P\left(1+\frac{r}{n}\right)^3\end{aligned}$$

$$\vdots$$

因為 t 年內共計算 nt 次的複利, 故類推, 得 t 年後的結餘為

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

如所求.

當計算次數 $n \to \infty$, 亦即, 隨時都計算複利時, 得 t 年後連續複利 (compounded continuously) 的結餘

$$A = \lim_{n\to\infty} P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} \tag{1}$$

接著, 根據純量乘積的極限性質, 連續函數的極限等於極限的函數值性質, 並經由適當的化簡, 由 (1) 式得

$$\begin{aligned}A &= P \cdot \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt}\\ &= P \cdot \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt} \qquad (2)\end{aligned}$$

又令

$$x = \frac{r}{n}$$

則

$$n \to \infty$$

乃相當於

$$x \to 0$$

故代入 (2) 式並根據無理數 e 的定義

$$e \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$$

得 t 年後連續複利的結餘

$$\begin{aligned} A &= P \cdot \left[\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} \right]^{rt} \\ &= Pe^{rt} \end{aligned}$$

例 1. 設本金 P 爲 25000 元, 年利率爲 6%, 則 25 年後各種計算複利方式下的結餘爲

(a) 連續複利:

$$\begin{aligned} A &= 25000e^{0.06(25)} \\ &= 112042.23 \text{ (元)} \end{aligned}$$

(b) 季複利 (compounded quarterly):

$$\begin{aligned} A &= 25000\left(1+\frac{0.06}{4}\right)^{4(25)} \\ &= 110801.14 \text{ (元)} \end{aligned}$$

(c) 月複利 (compounded monthly):

$$\begin{aligned} A &= 25000\left(1+\frac{0.06}{12}\right)^{12(25)} \\ &= 111624.25 \text{ (元)} \end{aligned}$$

(d) 日複利 (compounded daily):

$$\begin{aligned} A &= 25000\left(1+\frac{0.06}{365}\right)^{365(25)} \\ &= 112028.86 \text{ (元)} \end{aligned}$$

且

$$\text{(a)} > \text{(d)} > \text{(c)} > \text{(b)}$$

亦即, 計算複利的次數愈多, 結餘愈大, 與經驗相符.

定義. 年利率 r 又稱作名目利率 (nominal rate). 一年計算 n 次複利的有效利率 (effective rate)

$$r_{\text{eff}} \overset{\text{def}}{=} \left(1+\frac{r}{n}\right)^{n} - 1$$

爲何如此定義? 在一年計算 n 次複利下的結餘

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$$

故實得利息爲

$$\begin{aligned} A - P &= P\left(1+\frac{r}{n}\right)^n - P \\ &= P\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^n - 1\right] \end{aligned}$$

乃相當於實得利率爲

$$\frac{A-P}{P} = \left(1+\frac{r}{n}\right)^n - 1$$

而稱爲有效利率.

例 2. 設名目利率爲 8%, 則在各種計算複利方式下的有效利率爲

(a) 年複利 (compounded yearly):

$$r_{\text{eff}} = \left(1+\frac{0.08}{1}\right)^1 - 1 = 0.08$$

(b) 季複利:

$$r_{\text{eff}} = \left(1+\frac{0.08}{4}\right)^4 - 1 = 0.0824$$

(c) 月複利:

$$r_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^{12} - 1 = 0.0830$$

且

$$(\text{c}) > (\text{b}) > (\text{a})$$

亦即, 計算複利的次數愈多, 有效利率愈高, 與經驗相符.

定義. 在本金爲 P, 年利率爲 r, 且每年 n 次計算複利下, 則 t 年後的結餘

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

由此定義 t 年後結餘爲 A 的現值 (present value)

$$P \overset{\text{def}}{=} \frac{A}{\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}}$$

例 3. 在年利率 9%, 月複利下, 試問需存多少金額以致於 10 年定存的到期結餘爲 \$10000?

<解> 根據題意, 原問題乃相當於求現值 P 使得 10 年後的結餘 A 爲 \$10000, 亦即,

$$10000 = P\left(1 + \frac{0.09}{12}\right)^{12(10)}$$

故, 現值

$$P = \frac{10000}{\left(1+\frac{0.09}{12}\right)^{120}} = 4079.37$$

因此, 需存入 \$4079.37, 以致於在 9% 年利率, 以及月複利下, 10 年後的定存結餘爲 \$10000.

註. 定義 e 的極限式

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{1/x}$$

由型式上看, 當 x 任意地由右邊靠近 0 時, 得

$$1^{\infty}$$

故直觀上, 極限應爲 1, 實則不然, 而極限卻是

$$e \approx 2.71828182846\cdots$$

此乃因爲型式上的

$$1^{\infty}$$

乃表示一個任意靠近 1 的數乘以無窮多次, 而不是眞正的 1 乘以無窮多次. 此乃看似不合理, 卻是巧妙之處.

另, 極限式

$$\lim_{x \to 0}(1+2x)^{1/x} = e^2$$

以及

$$\lim_{x\to 0}(1-x)^{1/x}=e^{-1}$$

在型式上都得出與 e 的定義式相同的結果

$$1^{\infty}$$

但卻是三個不同的極限, 故稱

$$1^{\infty}$$

爲一未定型, 有別於未定型

$$\frac{0}{0} \text{ 或 } \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

外的另一種未定型, 將於介紹羅必達規則 (L'Hôpital's rule) 的單元中, 一併探討如何求各種不同未定型的極限.