單元 22: 繪圖
(課本 §3.7)

主要的基本工具爲 f' 與 f'', 以例說明如下.

例 1. 試繪函數

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$$

的圖形.

<解> (i) 求容易得到的 x 截距與 y 截距和水平與垂直漸近線.

y 截距: 令 $x = 0$, 得 $y = 5$. 故, y 截距爲 $(0, 5)$.

x 截距: 令 $y = 0$, 解 x, 亦即, 求

$$x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$$

的根, 不容易, 花時間, 故略過, 但不影響繪圖.

垂直漸近線: 無, 因爲 f 爲多項式.

水平漸近線: 無, 因爲 f 爲多項式.

註. 基本上, (i) 部份的結果以容易求得的為原則, 若太花時間, 則略過, 並不會影響繪圖.

(ii) 求相對極值. 經由微分並化簡, 得一階導函數

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 6x - 9 \\ &= 3(x^2 + 2x - 3) \\ &= 3(x+3)(x-1) \end{aligned}$$

接著, 求臨界數, 亦即, 相對極值候選數 (candidates), 如下述.

第一類臨界數: $f' = 0$, 亦相當於

$$(x+3)(x-1) = 0$$

得

$$x = -3, \ 1$$

第二類臨界數: f' 未定義的 x 值, 無, 因為 f' 為一多項式, 恆定義.

驗證: 根據求得的二個臨界數, 得三個子區間以及 f' 在每個子區間的符號, 如下述及圖示.

$(-\infty,-3)$: $f' = (-)(-) = (+)$, 遞增.

$(-3,1)$: $f' = (+)(-) = (-)$, 遞減.

$(1,\infty)$: $f' = (+)(+) = (+)$, 遞增.

故, 根據一階導函數檢定法, 函數 f 在 $x = -3$ 有相對極大值; 在 $x = 1$ 有相對極小值.

(iii) 求反曲點. 再微分並化簡, 得二階導函數

$$f''(x) = 6x + 6 = 6(x+1)$$

接著, 求反曲候選點, 如下述.

第一類: $f'' = 0$, 得

$$x = -1$$

第二類: f'' 未定義的 x 值, 無, 因爲 f'' 爲多項式, 恆定義.

驗證: 根據求得的一個反曲候選點, 得二個子區間以及 f'' 在每個子區間的符號, 如下述及圖示.

$(-\infty,-1)$: $f''=(-)$, 下凹.

$(-1,\infty)$: $f''=(+)$, 上凹.

因爲凹性在 $x=-1$ 的附近改變, 故在 $x=-1$ 有一反曲點.

(iv) 描點與連結. 根據上述 (i), (ii), (iii) 的結論, 先求出重要的點, 如下述.

將 $x=0$ 代入 f, 得 $y=5$, 以及 y 截距 $(0,5)$.

將 $x=-3$ 代入 f, 得

$$y=-27+27+27+5=32$$

以及相對極大值 $(-3,32)$

將 $x=-1$ 代入 f, 得

$$y=-1+3+9+5=16$$

以及反曲點 $(-1,16)$.

將 $x=1$ 代入 f, 得

$$y=1+3-9+5=0$$

以及相對極小值 $(1, 0)$

接著, 在坐標平面上, 描出上述求得的重要點, 並將 (ii) 中求得的 f' 的符號標記在 x 軸的上方, 以及在 (iii) 中求得的 f'' 的符號標記在 x 軸的下方.

最後, 根據 f' 所導出的遞增遞減性, 以及 f'' 所導出的凹性, 逐次地由左至右, 在重要點所分隔出的子區間上繪出對應的曲線, 並連結這些重要點, 如下述及圖示.

$(-\infty, -3)$: $f' = (+)$, $f'' = (-)$, 遞增且下凹.

$(-3, -1)$: $f' = (-)$, $f'' = (-)$, 遞減且下凹.

$(-1, 0)$: $f' = (-)$, $f'' = (+)$, 遞減且上凹.

$(0, 1)$: $f' = (-)$, $f'' = (+)$, 遞減且上凹.

$(1, \infty)$: $f' = (+)$, $f'' = (+)$, 遞增且上凹.

因此, 得函數 f 的圖形, 如圖示.

例 2. 試繪函數

$$f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x$$

的圖形.

<解> (i) 求容易得到的 x 截距與 y 截距和水平與垂直漸近線.

y 截距: 令 $x=0$, 得 $y=0$. 故, y 截距爲 $(0,0)$.

x 截距: 令 $y=0$, 解 x, 亦即, 求

$$x^4-12x^3+48x^2-64x=0$$

的根, 不容易, 花時間, 故略過, 但不影響繪圖.

水平漸近線: 無, 因爲 f 爲多項式.

垂直漸近線: 無, 因爲 f 爲多項式.

(ii) 求相對極值. 對 x 微分並化簡, 得一階導函數

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3-36x^2+96x-64 \\ &= 4(x^3-9x^2+24x-16) \\ &= 4(x-1)(x^2-8x+16) \\ &= 4(x-1)(x-4)^2 \end{aligned}$$

其中第三個等號成立乃是由第二個等號的右邊項知 1 爲一根, 並經由長除法除以 $x-1$ 所致.

接著, 求臨界數, 亦即, 相對極值候選數 (candidates), 如下述.

第一類臨界數: $f' = 0$, 亦相當於

$$(x-1)(x-4)^2 = 0$$

得

$$x = 1,\ 4$$

第二類臨界數: f' 未定義的 x 值, 無, 因爲 f' 爲一多項式, 恆定義.

驗證: 根據所求得的二個臨界數, 得三個子區間以及 f' 在每個子區間的符號, 如下述及圖示.

$(-\infty, 1)$: $f' = (-)(+) = (-)$, 遞減.

$(1, 4)$: $f' = (+)(+)$, 遞增.

$(4, \infty)$: $f' = (+)(+)$, 遞增.

因此, 根據一階導函數檢定法, 函數 f 在 $x = 1$ 有相對極小值; 在 $x = 4$ 無相對極值.

(iii) 求反曲點. 再對 x 微分並化簡, 得二階導函數

$$\begin{aligned} f''(x) &= 12x^2 - 72x + 96 \\ &= 12(x^2 - 6x + 8) \\ &= 12(x-2)(x-4) \end{aligned}$$

接著, 求反曲候選點, 如下述.

第一類: $f'' = 0$, 亦相當於

$$(x-2)(x-4) = 0$$

得

$$x = 2,\ 4$$

第二類: f'' 未定義的 x 值, 無, 因爲 f'' 爲多項式, 恆定義.

驗證: 根據所得的二個反曲候選點, 得三個子區間以及 f'' 在每個子區間上的符號, 如下述及圖示.

$(-\infty, 2)$: $f'' = (-)(-) = (+)$, 上凹.

$(2, 4)$: $f'' = (+)(-) = (-)$, 下凹.

$(4,\infty)$: $f'' = (+)(+) = (+)$, 上凹.

因為函數 f 的凹性在 $x = 2$ 與 $x = 4$ 的附近均改變, 故在 $x = 2$ 與 $x = 4$ 各有一個反曲點.

(iv) 描點與連結. 根據上述 (i), (ii), (iii) 的結論, 先求出重要的點, 如下述.

代 $x = 0$, 得 $y = 0$ 以及 y 截距 $(0,0)$.

代 $x = 1$, 得

$$y = 1 - 12 + 48 - 64 = -27$$

以及相對極小值 $(1,-27)$.

代 $x = 2$, 得

$$y = 16 - 96 + 192 - 128 = -16$$

以及反曲點 $(2,-16)$.

代 $x = 4$, 得

$$y = 256 - 768 + 768 - 256 = 0$$

以及反曲點 $(4,0)$.

接著，描出上述求得的重要點，並分別在 x 軸的上方與下方，標示出 f' 與 f'' 的符號.

最後，根據 f' 所得的遞增遞減性，以及 f'' 所導出的凹性，逐次地由左至右，在重要點所分割出的子區間上繪出對應的曲線，並連結這些重要點，如下述及圖示.

$(-\infty, 0)$：$f' = (-)$，$f'' = (+)$，遞減且上凹.

$(0, 1)$：$f' = (-)$，$f'' = (+)$，遞減且上凹.

$(1, 2)$：$f' = (+)$，$f'' = (+)$，遞增且上凹.

$(2, 4)$：$f' = (+)$，$f'' = (-)$，遞增且下凹.

$(4, \infty)$：$f' = (+)$，$f'' = (+)$，遞增且上凹.

因此，得函數 f 的圖形，如圖示.

例 3. 試繪函數

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$$

的圖形.

<解> (i) 求容易得到的 x 截距與 y 截距和水平與垂直漸近線.

y 截距: 代 $x=0$, 得 $y=-2$, 及 y 截距 $(0,-2)$.

x 截距: 略, 不影響繪圖.

垂直漸近線: $x=2$, 因爲 f 爲有理函數, 且代 $x=2$, 得分母爲 0, 以及

$$\text{分子}=4-4+4=4\neq 0$$

水平漸近線: 無, 因爲當 x 向右無界地延伸時, 經由分子分母同除以 x, 得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+4}{x-2} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x-2+4/x}{1-2/x}\\ &= \frac{\infty-2+0}{1-0}\\ &= \frac{\infty}{1}=\infty\end{aligned}$$

同理, 當 x 向左無界地延伸時, 得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x+4}{x-2} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x-2+4/x}{1-2/x}\\ &= \frac{-\infty-2+0}{1-0}\\ &= \frac{-\infty}{1}=-\infty\end{aligned}$$

極限均不存在, 故無水平漸近線.

註. 根據前單元的經驗, 亦可以除以最高次方 x^2, 但在分子的次方大於分母的次方時, 同除以分母的最高次方, 會較易處理, 如上述.

(ii) 求相對極值. 根據除法規則, 對 x 微分並化簡, 得一階導函數

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(2x-2)(x-2)-(x^2-2x+4)(1)}{(x-2)^2} \\
&= \frac{2x^2-4x-2x+4-x^2+2x-4}{(x-2)^2} \\
&= \frac{x^2-4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}
\end{aligned}
$$

第一類臨界數: $f'=0$, 亦相當於分子

$$x(x-4)=0$$

得

$$x=0,\ 4$$

第二類臨界數: f' 未定義的 x 值, 無, 雖然 $x=2$ 會使得 f' 的分母等於 0, 但臨界數的先決條件是必須在定義

域內, 而原函數 f 在 $x = 2$ 未定義, 故僅能歸類爲非連續點, 並且在決定 f' 的符號時, 還是需要考慮此種非連續點.

驗證: 根據上述求得的一個非連續點及兩個臨界數, 得四個子區間以及 f' 在每個子區間的符號, 如下述及圖示, 其中圖中的空心圓圈表示未定義的非連續點.

$(-\infty, 0)$: $f' = \dfrac{(-)(-)}{(+)} = (+)$, 遞增.

$(0, 2)$: $f' = \dfrac{(+)(-)}{(+)} = (-)$, 遞減.

$(2, 4)$: $f' = \dfrac{(+)(-)}{(+)} = (-)$, 遞減.

$(4, \infty)$: $f' = \dfrac{(+)(+)}{(+)} = (+)$, 遞增.

故, 根據一階導函數檢定法, 函數 f 在 $x = 0$ 有相對極大值; 在 $x = 4$ 有相對極小值.

(iii) 求反曲點. 再根據除法規則, 對 x 微分, 得二階導函數 $f''(x)$ 的分子爲

$$(2x - 4)(x - 2)^2 - (x^2 - 4x)(2)(x - 2)$$

提出公因式 $(x-2)$, 得

$$(x-2)[(2x-4)(x-2)-2(x^2-4x)]$$

展開上式的中括號並整理, 得

$$2x^2-4x-4x+8-2x^2+8x=8$$

因此,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{8(x-2)}{(x-2)^4} \\ &= \frac{8}{(x-2)^3} \end{aligned}$$

接著, 求反曲候選點, 如下述.

第一類: $f''=0$, 無, 因爲分子爲 8, 恆不等於 0.

第二類: f'' 未定義的 x 值, 亦即, 分母

$$(x-2)^3=0$$

得 $x=2$, 但反曲候選點的先決條件是在定義域內, 而原函數在 $x=2$ 未定義, 故 $x=2$ 僅能歸類爲非連續點, 而導致無第二類反曲候選點, 但在決定 f'' 的符號時, 還是需要考慮此種非連續點.

由於沒有任何反曲候選點, 故函數 f 沒有反曲點. 但還是需要決定函數 f 的凹性, 以便繪圖, 如下述.

根據所得的一個非連續點, 得二個子區間以及 f'' 在每個子區間的符號, 如下述及圖示, 其中圖中的空心圓圈表示未定義的非連續點.

$(-\infty, 2)$: $f'' = \frac{(+)}{(-)} = (-)$, 下凹.

$(2, \infty)$: $f'' = \frac{(+)}{(+)} = (+)$, 上凹.

(iv) 描點與連結. 先求出上述結論中的重要點, 如下述.

代 $x = 0$, 得 $y = -2$, 以及相對極大值 $(0, -2)$, 亦是 y 截距.

代 $x = 4$, 得

$$y = \frac{16 - 8 + 4}{4 - 2} = \frac{12}{2} = 6$$

以及相對極小值 $(4, 6)$.

接著, 描出上述的重要點, 繪出垂直漸近線 $x = 2$, 以及分別標記 f' 與 f'' 的符號在 x 軸的上方與下方.

最後, 根據 f' 所導出的遞增遞減性, 以及 f'' 所導出的凹性, 逐次地由左至右, 在重要點以及垂直漸近線所分割出的子區間上繪出對應的曲線, 並連結這些重要點, 如下述及圖示.

$(-\infty, 0)$: $f' = (+)$, $f'' = (-)$, 遞增且下凹.

$(0, 2)$: $f' = (-)$, $f'' = (-)$, 遞減且下凹.

$(2, 4)$: $f' = (-)$, $f'' = (+)$, 遞減且上凹.

$(4, \infty)$: $f' = (+)$, $f'' = (+)$, 遞增且上凹.

因此, 得 f 的圖形, 如圖示.

例 4. 試繪函數

$$f(x) = \frac{2(x^2 - 9)}{x^2 - 4}$$

的圖形.

<解> (i) y 截距: 代 $x = 0$, 得 $y = \frac{9}{2}$, 以及 y 截距 $\left(0, \frac{9}{2}\right)$.

x 截距: 令 $y = 0$, 解 x, 亦即, 求

$$x^2 - 9 = 0$$

的根, 得 $x = \pm 3$. 故, x 截距爲 $(-3, 0)$ 與 $(3, 0)$.

垂直漸近線: $x = \pm 2$, 因爲此時分母等於 0, 且分子不等於 0; 亦爲非連續點.

水平漸近線: $y = 2$, 因爲當 x 向左右無界地延伸時, 經由分子分母同除以 x^2, 得

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2(x^2 - 9)}{x^2 - 4} &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2(1 - 9/x^2)}{1 - 4/x^2} \\
&= \frac{2(1 - 0)}{1 - 0} = 2
\end{aligned}$$

(ii) 求相對極值. 根據除法規則, 對 x 微分並化簡, 得一階導函數

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2 \cdot \frac{2x(x^2 - 4) - (x^2 - 9)(2x)}{(x^2 - 4)^2} \\
&= 2 \cdot \frac{2x^3 - 8x - 2x^3 + 18x}{(x^2 - 4)^2} \\
&= \frac{20x}{(x^2 - 4)^2}
\end{aligned}$$

第一類臨界數: $f' = 0$, 亦即, 分子

$$20x = 0$$

得

$$x = 0$$

第二類臨界數: f' 未定義的 x 值, 無, 雖然在 $x = \pm 2$ 時, f' 的分母等於 0, 未定義, 但不在 f 的定義域內, 而爲非連續點, 亦爲產生垂直漸近線的地方, 在決定 f' 的符號時, 還是需要考慮此種非連續點.

驗證: 根據上述求得的一個臨界數及二個非連續點, 得四個子區間以及 f' 在每個子區的符號, 如下述及圖示, 其中圖中的空心圓圈表示未定義的非連續點.

$(-\infty, -2)$: $f' = \dfrac{(-)}{(+)} = (-)$, 遞減.

$(-2, 0)$: $f' = \dfrac{(-)}{(+)} = (-)$, 遞減.

$(0, 2)$: $f' = \dfrac{(+)}{(+)} = (+)$, 遞增.

$(2, \infty)$: $f' = \dfrac{(+)}{(+)} = (+)$, 遞增.

故, 根據一階導函數檢定法, f 在 $x = 0$ 有相對極小值.

(iii) 求反曲點. 再根據除法規則, 對 x 微分並化簡, 得二階導函數

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{20(x^2-4)^2 - 20x(2)(x^2-4)(2x)}{(x^2-4)^4} \\ &= \frac{20(x^2-4)(x^2-4-4x^2)}{(x^2-4)^4} \\ &= \frac{-20(3x^2+4)}{(x^2-4)^3} \end{aligned}$$

第一類反曲候選點: $f'' = 0$, 無, 因爲 f'' 的分子乃恆爲負, 不等於 0.

第二類反曲候選點: f'' 未定義的 x 值, 亦相當於分母

$$(x^2-4)^3 = 0$$

得 $x = \pm 2$, 但不在 f 的定義域內, 僅爲非連續點.

因此, 函數 f 無反曲點. 但還是需要決定 f 的凹性, 以便繪圖, 如下述.

根據所得的二個非連續點, 得三個子區間以及 f'' 在每個子區間的符號, 如下述及圖示, 其中圖中的空心圓圈表示未定義的非連續點.

$(-\infty,-2)$: $f''=\frac{(-)}{(+)}=(-)$, 下凹.

$(-2,2)$: $f''=\frac{(-)}{(-)}=(+)$, 上凹.

$(2,\infty)$: $f''=\frac{(-)}{(+)}=(-)$, 下凹.

(iv) 描點與連結. 先求出上述結論中的重要點, 如下述.

代 $x=0$, 得 $y=\frac{9}{2}$ 以及相對極小值 $\left(0,\frac{9}{2}\right)$.

代 $x=\pm 3$, 得 $y=0$ 以及兩個 x 截距 $(-3,0)$ 與 $(3,0)$.

接著, 描出上述重要的點, 繪出兩條垂直漸近線 $x=\pm 2$, 一條水平漸近線 $y=2$, 以及分別標記 f' 與 f'' 的符號在 x 軸的上方與下方.

最後, 根據 f' 所導出的遞增遞減性, 以及 f'' 所導出的凹性, 逐次地由左至右, 在重要點以及垂直漸近線所分割出的子區間上繪出對應的曲線, 並連結這些重要點, 如下述及圖示.

$(-\infty,-3)$: $f'=(-)$, $f''=(-)$, 遞減且下凹.

$(-3,-2)$: $f' = (-)$, $f'' = (-)$, 遞減且下凹.

$(-2,0)$: $f' = (-)$, $f'' = (+)$, 遞減且上凹.

$(0,2)$: $f' = (+)$, $f'' = (+)$, 遞增且上凹.

$(2,3)$: $f' = (+)$, $f'' = (-)$, 遞增且下凹.

$(3,\infty)$: $f' = (+)$, $f'' = (-)$, 遞增且下凹.

因此, 得 f 的圖形, 如圖示.

例 5. 試繪函數

$$f(x) = 2x^{5/3} - 5x^{4/3}$$

的圖形.

<解> (i) y 截距: 代 $x = 0$, 得 $y = 0$. 故, y 截距爲 $(0,0)$.

垂直漸近線: 無, 因爲沒有分母.

水平漸近線: 無, 因爲首項的次方爲 $\frac{5}{3} > 0$.

(ii) 求相對極值. 對 x 微分並化簡, 得一階導函數

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{10}{3}x^{2/3} - \frac{20}{3}x^{1/3} \\ &= \frac{10}{3}x^{1/3}(x^{1/3} - 2) \end{aligned}$$

接著, 求相對極值候選數, 亦即, 臨界數, 如下述.

第一類臨界數: $f' = 0$, 亦相當於

$$x^{1/3}(x^{1/3} - 2) = 0$$

得

$$x = 0,\ 8$$

第二類臨界數: f' 未定義的 x 值, 無, 因爲 f' 恆定義.

驗證: 根據所求得的二個臨界數, 得三個子區間以及 f' 在每個子區間的符號, 如下述及圖示.

$(-\infty, 0)$: $f' = (-)(-) = (+)$, 遞增.

$(0, 8)$: $f' = (+)(-) = (-)$, 遞減.

$(8, \infty)$: $f' = (+)(+) = (+)$, 遞增.

因此, 根據一階導函數檢定法, f 在 $x = 0$ 有相對極大值; 在 $x = 8$ 有相對極小值.

(iii) 求反曲點. 再對 x 微分並化簡, 得

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{20}{9}x^{-1/3} - \frac{20}{9}x^{-2/3} \\ &= \frac{20}{9}x^{-2/3}(x^{1/3} - 1) \\ &= \frac{20(x^{1/3} - 1)}{9x^{2/3}} \end{aligned}$$

則 $f'' = 0$ 乃相當於分子的

$$x^{1/3} - 1 = 0$$

得第一類反曲候選點

$$x = 1$$

且 f'' 未定義的 x 值乃相當於分母的

$$x^{2/3} = 0$$

得

$$x = 0$$

在 f 的定義域內, 故爲第二類反曲候選點.

驗證: 根據求得的兩個反曲候選點, 得三個子區間以及 f'' 在每個子區間的符號, 如下述及圖示.

$(-\infty, 0)$: $f'' = \frac{(-)}{(+)} = (-)$, 下凹.

$(0, 1)$: $f''\frac{(-)}{(+)} = (-)$, 下凹.

$(1, \infty)$: $f'' = \frac{(+)}{(+)} = (+)$, 上凹.

因爲在 $x = 0$ 附近的凹性未改變, 故在 $x = 0$ 沒有反曲點; 而在 $x = 1$ 附近的凹性改變, 故在 $x = 1$ 有一個反曲點.

(iv) 描點與連結. 先求出上述結論中的重要點, 如下述.

代 $x = 0$, 得 $y = 0$ 以及相對極大値 $(0, 0)$.

代 $x = 8$, 得

$$y = 2(32) - 5(16) = 64 - 80 = -16$$

以及相對極小値 $(8, -16)$.

代 $x = 1$, 得

$$y = 2 - 5 = -3$$

以及反曲點 $(1, -3)$.

接著, 描出上述重要的點, 並分別標記 f' 與 f'' 的符號在 x 軸的上方與下方.

最後, 根據 f' 所導出的遞增遞減性, 以及 f'' 所導出的凹性, 逐次地由左至右, 在重要點所分割出的子區間上繪出對應的曲線, 並連結這些重要點, 如下述及圖示.

$(-\infty, 0)$: $f' = (+)$, $f'' = (-)$, 遞增且下凹.

$(0, 1)$: $f' = (-)$, $f'' = (-)$, 遞減且下凹.

$(1, 8)$: $f' = (-)$, $f'' = (+)$, 遞減且上凹.

$(8, \infty)$: $f' = (+)$, $f'' = (+)$, 遞增且上凹.

因此, 得 f 的圖形, 如圖示.