單元 21: 漸近線
(課本 §3.6)

一. 垂直漸近線與無窮極限

觀察. 函數

$$f(x) = \frac{3}{x-2}$$

在點 $x = 2$ 附近的行爲如下述.

當 x 由右邊任意靠近 2 時, $x > 2$ 且 $x - 2$ 爲正並可任意地靠近 0, 故以

$$x - 2 \to 0^+$$

表示, 如圖示, 並得

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{3}{x-2} = \frac{3}{0^+} = \infty$$

同理, 當 x 由左邊任意靠近 2 時, $x < 2$ 且 $x - 2$ 爲負並可任意地靠近 0, 故以

$$x - 2 \to 0^-$$

表示, 如圖示, 並得

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{3}{x-2} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

當極限爲 ∞ 或 $-\infty$ 時, 統稱爲無窮極限 (infinite limits).

根據上述的二極限, 得函數 $f(x)$ 的圖形如下, 其中的鉛垂線 $x = 2$ 稱作垂直漸近線 (vertical asymptote, 簡記成 V.A.), 因爲當 x 任意地靠近 2 時, 可得無窮極限, 而使得函數圖形可漸漸地任意靠近鉛垂線 $x = 2$. 正式定義如下.

定義. 若函數 f 在點 $x = c$ 的右單邊極限

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty$$

或左單邊極限

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty$$

只要上述的二個極限中一個成立即可, 則稱鉛垂線

$$x = c$$

爲函數 f 的一條垂直漸近線, 亦即, 函數 f 在點 $x = c$ 的一個單邊極限爲 ∞ 或 $-\infty$ 時, 鉛垂線 $x = c$ 就是一條垂直漸近線.

問. 如何找有理函數

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

其中 $p(x)$ 與 $q(x)$ 均爲多項式, 的垂直漸近線?

答. 若 c 使得分母

$$q(c) = 0$$

但分子

$$p(c) \neq 0$$

則 $x = c$ 是一垂直漸近線.

爲何如此? 因爲當 x 由右邊任意靠近 c 時,

$$\lim_{x \to c^+} p(x) = p(c) \neq 0$$

且

$$\lim_{x \to c^+} q(x) = q(c^+) = 0^+ \text{ 或 } 0^-$$

明確地表示出如何任意地靠近 0, 故右單邊極限

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \frac{p(c)}{0^\pm} = \pm\infty$$

或, 同理, 當 x 由左邊任意靠近 c 時,

$$\lim_{x \to c^-} p(x) = p(c) \neq 0$$

且

$$\lim_{x\to c^-} q(x) = q(c^-) = 0^+ \text{ 或 } 0^-$$

明確地表示出如何任意地靠近 0，故左單邊極限

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \frac{p(c)}{0^\pm} = \pm\infty$$

故，由定義知，

$$x = c$$

爲一垂直漸近線.

註. 若分子與分母同時爲 0 時，則需經由消去公因式或其他方式化簡後，再判斷是否有垂直漸近線.

例 1. 試求下列各函數的垂直漸近線，並討論垂直漸近線附近的函數行爲.

(a) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-2x}$

(b) $g(x) = \dfrac{x^2+2x-8}{x^2-4}$

(c) $h(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 1}$

<解> (a) 因爲 $f(x)$ 爲有理函數, 故僅需求分母等於 0, 但分子不爲 0 的 x 值. 首先, 分母等於 0 乃相當於

$$x^2 - 2x = x(x - 2) = 0$$

得

$$x = 0,\ 2$$

又 $x = 0$ 時,

$$\text{分子} = 0 + 2 \neq 0$$

且當 $x = 2$ 時,

$$\text{分子} = 2 + 2 \neq 0$$

故,

$$x = 0$$

與

$$x = 2$$

爲函數 f 的二垂直漸近線.

在 $x = 2$ 附近的行爲:

(1) 當 x 由右邊任意靠近 2 時, $x > 2$ 且

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+2}{x(x-2)} = \frac{4}{2\cdot 0^+} = \frac{4}{0^+} = \infty$$

如圖示.

(2) 當 x 由左邊任意靠近 2 時, $x < 2$ 且

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x+2}{x(x-2)} = \frac{4}{2\cdot 0^-} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

如圖示.

在 $x = 0$ 附近的行爲:

(1) 當 x 由右邊任意靠近 0 時, $x > 0$ 且

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+2}{x(x-2)} = \frac{2}{0^+(-2)} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

如圖示.

(2) 當 x 由左邊任意靠近 0 時, $x < 0$ 且

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x+2}{x(x-2)} = \frac{2}{0^-(-2)} = \frac{2}{0^+} = \infty$$

如圖示.

(b) 因爲 $g(x)$ 爲有理函數, 故僅需求分母等於 0, 但分子不爲 0 的 x 值即可. 首先, 分母等於 0 乃相當於

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2) = 0$$

得

$$x = -2,\ 2$$

又 $x = -2$ 時,

$$\text{分子} = 4 - 4 - 8 \neq 0$$

故,

$$x = -2$$

爲一垂直漸近線.

當 $x = 2$ 時,

$$\text{分子} = 4 + 4 - 8 = 0$$

故需先經由分解及消去公因式的化簡, 得

$$g(x) = \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+4}{x+2},\ x \neq 2$$

由此得

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x+4}{x+2} = \frac{3}{2} \neq \pm\infty$$

所以, 根據垂直漸近線的定義,

$$x = 2$$

不是一垂直漸近線.

因此, 函數 $g(x)$ 只有一條垂直漸近線

$$x = -2$$

在 $x = -2$ 附近的行爲:

(1) 當 x 由右邊任意靠近 -2 時, $x > -2$ 且

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x+4}{x+2} = \frac{2}{0^+} = \infty$$

如圖示.

(2) 當 x 由左邊任意靠近 -2 時, $x < -2$ 且

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x+4}{x+2} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

如圖示.

(c) 因爲 $h(x)$ 爲一有理函數, 故僅需求分母等於 0, 但分子不等於 0 的 x 值. 首先, 分母等於 0 乃相當於

$$x-1=0$$

得

$$x=1$$

又當 $x=1$ 時,

$$\text{分子}=1-3\neq 0$$

故,

$$x=1$$

爲一垂直漸近線.

在 $x=1$ 附近的行爲:

(1) 當 x 由右邊任意靠近 1 時, $x>1$ 且

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-3x}{x-1}=\frac{1-3}{0^+}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

如圖示.

(2) 當 x 由左邊任意靠近 1 時, $x < 1$ 且

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 3x}{x - 1} = \frac{1 - 3}{0^-} = \frac{-2}{0^-} = \infty$$

如圖示.

二. 水平漸近線與在無窮遠的極限

定義. (1) 極限

$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$

或

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

統稱爲函數 f 在無窮遠的極限 (limits at infinity), 乃描述 x 無界地向右延伸至 ∞ 或向左無界地延伸至 $-\infty$ 時, $f(x)$ 的行爲.

(2) 若存在實數 L_1 與 L_2 使得

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L_1$$

且

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L_2$$

則稱水平線

$$y = L_1$$

與

$$y = L_2$$

爲 $f(x)$ 的水平漸近線 (horizontal asymptotes, 簡記成 H.A.).

註. 在無窮遠的極限爲 L_1 或 L_2 時, 會使得當 x 向兩邊無界地延伸後, 函數的圖形會漸漸地任意靠近水平線

$$y = L_1$$

或

$$y = L_2$$

故稱此種直線爲函數的水平漸近線.

例 2. 試求下列各函數的水平漸近線.

(a) $f(x) = 5 - \dfrac{2}{x^2}$

(b) $g(x) = \dfrac{-2x+3}{3x^2+1}$

(c) $h(x) = \dfrac{-2x^2+3}{3x^2+1}$

(d) $k(x) = \dfrac{-2x^3}{3x^2+1}$

<解> 根據定義, 求水平漸近線乃相當於求在無窮遠的極限. 故 (a) 當 x 向右無界地延伸時, 得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(5-\frac{2}{x^2}\right) &= 5-\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}\\ &= 5-\frac{2}{\infty}\\ &= 5-0=5\end{aligned}$$

另, 當 x 向左無界地延伸時, 得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(5-\frac{2}{x^2}\right) &= 5-\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2}\\ &= 5-\frac{2}{(-\infty)^2}\\ &= 5-\frac{2}{\infty}=5-0=5\end{aligned}$$

因爲 x 向左右兩邊無界延伸後的極限一樣, 故只有一條水平漸近線

$$y=5$$

(b) 當有理函數的分子與分母的次方都至少為 1 時，一個求在無窮遠的極限的方法乃是先將分子與分母同除以分子與分母中的最高次方後 (經常分母的即可)，再求極限.

因為函數 g 的分子與分母的最高次方為 x^2，故將分子與分母同除以 x^2，並根據分配律，得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{-2x+3}{3x^2+1} &= \lim_{x\to\infty}\frac{-2/x+3/x^2}{3+1/x^2}\\ &= \frac{-2/\infty+3/\infty}{3+1/\infty}\\ &= \frac{0+0}{3+0}=\frac{0}{3}=0\end{aligned}$$

同理，當 x 向左無界地延伸時，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+3}{3x^2+1} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2/x+3/x^2}{3+1/x^2}\\ &= \frac{-2/(-\infty)+3/\infty}{3+1/\infty}\\ &= \frac{0+0}{3+0}=\frac{0}{3}=0\end{aligned}$$

因為 x 向左右兩邊無界延伸後的極限一樣，故只有一條水平漸近線

$$y=0$$

(c) 因爲函數 h 的分子與分母的最高次方爲 x^2，故將分子與分母同除以 x^2 並化簡，得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2+3}{3x^2+1} &= \lim_{x\to\infty}\frac{-2+3/x^2}{3+1/x^2}\\ &= \frac{-2+0}{3+0}=-\frac{2}{3}\end{aligned}$$

同理，當 x 向左無界地延伸時，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^2+3}{3x^2+1} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2+3/x^2}{3+1/x^2}\\ &= \frac{-2+0}{3+0}=-\frac{2}{3}\end{aligned}$$

因爲 x 向左右兩邊無界延伸後的極限一樣，故只有一條水平漸近線

$$y=-\frac{2}{3}$$

(d) 因爲函數 k 的分子與分母的最高次方爲 x^3，故將分子與分母同除以 x^3 並化簡，得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^3+1}{3x^2+1} &= \lim_{x\to\infty}\frac{-2+1/x^3}{3/x+1/x^3}\\ &= \frac{-2+0^+}{0^++0^+}=\frac{-2}{0^+}=-\infty\end{aligned}$$

不是一實數, 故極限不存在, 乃表示當 x 向右無界地延伸時, 對應的函數值 $k(x)$ 會無界地遞減到負無窮大, 而無法找到一條水平線使得函數 $k(x)$ 的圖形會漸漸地任意靠近此水平線.

同理, 當 x 向左無界地延伸時,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^3+1}{3x^2+1} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2+1/x^3}{3/x+1/x^3}\\ &= \frac{-2+0^-}{0^-+0^-}=\frac{-2}{0^-}=\infty\end{aligned}$$

不是一實數, 故極限不存在, 乃表示當 x 向左無界地延伸時, 對應的函數值 $k(x)$ 會無界地遞增到正無窮大, 而無法找到一條水平線使得函數 $k(x)$ 的圖形會漸漸地任意靠近此水平線.

因爲 x 向左右兩邊無界延伸後的極限都不存在, 故沒有水平漸近線.

註. 例 2 中的 (a), (b), 與 (c) 都只有一條水平漸近線, (d) 沒有水平漸漸線, 然而 x 可向左右兩邊無界地延伸, 故理論上或根據繪圖的經驗, 應會有兩條而且最多只有兩條不同水平漸近線的情形, 如函數

$$f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+2}}$$

爲何如此? 水平漸近線爲何?

首先, 將分母中根號內的 x^2 提出並化簡, 得

$$f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}=\frac{2x}{\sqrt{x^2}\sqrt{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}} \qquad (1)$$

再根據

$$\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

當 $x>0$ 時, 由 (1) 式, 得

$$f(x)=\frac{2x}{x\sqrt{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}=\frac{2}{\sqrt{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}} \qquad (2)$$

當 $x<0$ 時, 由 (1) 式, 得

$$f(x)=\frac{2x}{-x\sqrt{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}=\frac{-2}{\sqrt{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}} \qquad (3)$$

因此, 當 x 向右無界地延伸時, $x>0$, 故由 (2) 式, 得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{1+0}}=2\end{aligned}$$

同理，當 x 向左無界地延伸時，$x<0$，故由 (3) 式，得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{\sqrt{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}\\ &= \frac{-2}{\sqrt{1+0}}=-2\end{aligned}$$

因此，根據定義，函數 f 有兩條水平漸近線

$$y=2$$

與

$$y=-2$$

<另解> 雖然 f 不是有理函數，但還是可以先將分子分母同除以最高次方後，再求在無窮遠的極限．此時，雖然分母根號內的最高次方爲 x^2，但因爲在根號內需要開方，故視爲 x，得分子與分母的最高次方爲 x．所以，求極限的過程爲，先將分子分母同除以 x，並根據 x 的正負化簡後，再求極限．請自行練習．