單元 19: 最佳化問題
(課本 §3.4)

微積分的一個應用乃是求感興趣的量的最大值或最小值, 下面以例子說明解此種最佳化問題 (optimization problems) 的方法.

例 1. 一製造商欲設計一開口盒, 其底部爲正方形且表面積爲 108 吋^2. 試問在何種尺寸 (dimensions, 長寬高) 下, 可得最大體積?

<解> 因爲是開口且底部爲一正方形, 故僅有 5 個面, 如圖示. 幾種可能性如下: (1) 底部是邊長爲 3 的正方形, 且高爲 $8\frac{1}{4}$, 記成 $3 \times 3 \times 8\frac{1}{4}$, 則其

$$\begin{aligned} \text{表面積} &= 3^2 + 4 \cdot 3 \cdot \frac{33}{4} \\ &= 9 + 99 = 108 \text{ 吋}^2 \end{aligned}$$

符合要求的條件, 且

$$\text{體積} = 3 \cdot 3 \cdot 8\frac{1}{4} = 74\frac{1}{4} \text{ 吋}^3$$

(2) 尺寸爲 $4 \times 4 \times 5\frac{3}{4}$, 則

$$\begin{aligned} \text{表面積} &= 4^2 + 4 \cdot 4 \cdot \frac{23}{4} \\ &= 16 + 92 = 108 \text{ 吋}^2 \end{aligned}$$

符合條件, 且

$$\text{體積} = 4 \cdot 4 \cdot 5\frac{3}{4} = 92 \text{ 吋}^3$$

$$\vdots$$

事實上, 有無限多種組合. 何種組合可得最大的體積?

基本上, 標準的解法步驟爲 (i) 此問題乃相當於最大化 (maximize)

$$V = x^2 h$$

稱作首要方程式 (primary equation, 欲求極值的量).

(ii) 條件爲

$$x^2 + 4xh = 108$$

稱作次要方程式 (secondary equation, 提供首要方程式中, 自變數間的關係).

(iii) 將條件中的 h 以 x 表示, 並代入首要方程式, 得

$$h = \frac{1}{4x}(108 - x^2)$$

以及

$$V = x^2 \cdot \frac{1}{4x}(108 - x^2) = 27x - \frac{1}{4}x^3$$

將由原來含有兩個自變數 x 與 h 的方程式, 變爲只含一個自變數 x 的方程式.

(iv) 求首要方程式的適當定義域 (feasible domain, 合宜, 可能定義域, 使得原問題有意義的 x 值). 因爲 $x \geq 0$, $h \geq 0$ (分別表示長寬與高), 故由次要方程式得

$$x^2 \leq 108$$

由此導出

$$0 \leq x \leq \sqrt{108}$$

(v) 求極值. 因爲體積

$$V = 27x - \frac{1}{4}x^3$$

在閉區間 $[0, \sqrt{108}]$ 上連續, 根據極值定理, 一定有絕對最大值. 首先, 對 x 微分, 得

$$\frac{dV}{dx} = 27 - \frac{3}{4}x^2$$

第一類臨界數: $\frac{dV}{dx} = 0$, 亦即,

$$27 - \frac{3}{4}x^2 = 0$$

得

$$x = \pm\sqrt{\frac{4\cdot 27}{3}} = \pm\sqrt{36} = \pm 6$$

因爲臨界數必須在適當的定義域內，故負不合，得

$$x = 6 \in [0, \sqrt{108}]$$

第二類臨界數：無，因爲 $\frac{dV}{dx}$ 爲一多項式，恆定義.

驗證：根據上述的一個臨界數，得二個子區間以及 $\frac{dV}{dx}$ 在每個子區間的符號，如下述及圖示.

$(0, 6)$：$\frac{dV}{dx} = (+)$，遞增.

$(6, \sqrt{108})$：$\frac{dV}{dx} = (-)$，遞減.

所以，根據一階導函數檢定法，在 $x = 6$ 有相對極大值. 又因爲只有一個臨界數，此相對極大值亦是一絕對最大值，如所求.

故，當 $x = 6$ 時，高度

$$h = \frac{1}{4\cdot 6}(108 - 36) = \frac{72}{24} = 3$$

且有最大體積

$$V = 6 \cdot 6 \cdot 3 = 108 \text{ 吋}^3$$

因此, 產生最大體積的尺寸為 $6 \times 6 \times 3$.

例 2. 設二正數的乘積為 288. 試求第二數與二倍第一數的和的最小值.

<解> 設此二數為 x 與 y. 則根據題意,

$$x > 0, \; y > 0$$

且 (i) 原問題乃相當於最小化 (minimize)

$$S = 2x + y$$

稱作首要方程式.

(ii) 條件為

$$xy = 288$$

稱作次要方程式.

(iii) 解 (ii) 中的 y, 並代入 S, 得

$$y = \frac{288}{x}$$

且

$$S = 2x + \frac{288}{x}$$

將首要方程式由原來的兩個自變數 x 與 y, 改寫成只含一個自變數 x.

(iv) 因爲是二正數, 得 S 的適當定義域爲

$$x > 0$$

(v) 求極值. 將 S 對 x 微分, 得

$$\frac{dS}{dx} = 2 - \frac{288}{x^2} = 2\left(\frac{x^2 - 144}{x^2}\right)$$

第一類臨界數: $\frac{dS}{dx} = 0$, 亦相當於分子

$$x^2 - 144 = 0$$

得

$$x = 12, \ -12 \text{ (負不合)}$$

第二類臨界數: $\frac{dS}{dx}$ 未定義的 x 值, 無, 因爲適當定義域爲 $x > 0$, $\frac{dS}{dx}$ 在其上恆定義.

驗證: 根據所求得的一個臨界數, 得二個子區間以及 $\frac{dS}{dx}$ 在每個子區間的符號, 如下述及圖示, 其中的空心圓表示 $x = 0$ 不在定義域內.

$(0, 12)$: $\frac{dS}{dx} = (-)$, 遞減.

$(12, \infty)$: $\frac{dS}{dx} = (+)$, 遞增.

故, 根據一階導函數檢定法, 當 $x = 12$ 時, 有相對極小值. 又因爲只有一個臨界數, 此相對極小值亦爲一絕對最小值, 如所求.

因此, 當

$$x = 12$$

且

$$y = \frac{288}{12} = 24$$

時, S 有最小值

$$2(12) + 24 = 48$$

例 3. 試求在圖形

$$y = 4 - x^2$$

上, 距點 $(0,2)$ 最近的點.

<解> 令 (x,y) 爲圖形上的點. 根據圖示, 得 (i) 原問題相當於最小化首要方程式

$$d=\sqrt{x^2+(y-2)^2}$$

(ii) 條件爲

$$y=4-x^2$$

稱作次要方程式.

(iii) 將 y 代入 d, 得

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{x^2+(2-x^2)^2} \\ &= \sqrt{x^4-3x^2+4} \end{aligned}$$

將首要方程式由兩個自變數 x 與 y, 改寫成只含一個自變數 x.

(iv) 由圖形知, 適當定義域爲

$$-\infty<x<\infty$$

(v) 求極值. 因爲平方對正數含有遞增的性質, 故平方前產生最大值或最小值的地方, 平方後還是在相同的地方產

生最大值或最小值, 亦即, 產生極值的地方不受平方作用的影響, 但平方後也許會得到容易微分的函數. 因此, 求 d 的最小值乃相當於求

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} d^2 = x^4 - 3x^2 + 4$$

的最小值, 但相較於函數 d, 容易求函數 f 的導函數. 首先, 經由微分並分解, 得

$$f'(x) = 4x^3 - 6x = 2x(2x^2 - 3)$$

第一類臨界數: $f' = 0$, 亦相當於

$$x(2x^2 - 3) = 0$$

得

$$x = 0,\ \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

第二類臨界數: f' 未定義的 x 值, 無, 因爲 f' 爲一多項式, 恆定義.

驗證: 根據求得的三個臨界數, 得四個子區間以及 f' 在每個子區間的符號, 如下述及圖示.

$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$: $f' = (-)(+) = (-)$, 遞減.

$\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right)$: $f' = (-)(-) = (+)$, 遞增.

$\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$: $f' = (+)(-) = (-)$, 遞減.

$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty\right)$: $f' = (+)(+) = (+)$, 遞增.

因此, 根據一階導函數檢定法, 在 $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$, f 有相對極小值. 又根據 f' 的符號圖以及 f 對於 y 軸的對稱性, 此相對極小值亦爲一絕對最小值. 最後, 根據函數 f 與函數 d 產生極值的地方相同, 得函數 d 在 $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ 有絕對最小值, 如所求.

因此, 當

$$x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

且

$$y = 4 - \left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

時, 亦即, 在點

$$\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right) \text{ 與 } \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)$$

上, 有最短距離

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 2\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{7}{4}} \end{aligned}$$

例 4. 設一長方形紙張內, 可印刷的部分是一面積為 24 吋^2 的長方形, 且上下邊寬各為 1.5 吋, 左右邊寬各為 1 吋, 如圖示. 試問此種紙張的尺寸 (dimensions, 長寬) 為何時, 最省紙?

<解> 根據題意及圖示, (i) 原問題乃相當於最小化首要方程式

$$A = (x + 3)(y + 2)$$

(ii) 次要方程式所表示的條件為

$$xy = 24$$

(iii) 由條件解 y, 並代入 A, 得

$$y = \frac{24}{x}$$

以及

$$
\begin{aligned}
A &= (x+3)\left(\frac{24}{x}+2\right) \\
&= 2x+\frac{72}{x}+30
\end{aligned}
$$

將首要方程式由兩個自變數 x 與 y, 改寫成只含一個自變數 x.

(iv) 因爲 x 表示長度, 需爲正數, 故適當定義域爲

$$x > 0$$

(v) 求極值. 經由微分並化簡,得

$$\frac{dA}{dx} = 2 - \frac{72}{x^2} = \frac{2(x^2-36)}{x^2}$$

第一類臨界數: $\frac{dA}{dx} = 0$, 亦相當於分子中的

$$(x^2-36) = 0$$

得

$$x = \pm 6 \text{ (負不合)}$$

第二類臨界數: $\frac{dA}{dx}$ 未定義的 x 值, 無, 因爲適當定義域爲 $x > 0$, $\frac{dA}{dx}$ 在其上恆定義.

驗證: 根據求得的一個臨界數, 得二個子區間以及 $\frac{dA}{dx}$ 在每個子區間上的符號, 如下述及圖示.

$(0, 6)$: $\frac{dA}{dx} = (-)$, 遞減.

$(6, \infty)$: $\frac{dA}{dx} = (+)$, 遞增.

所以, 根據一階導函數檢定法, 在 $x = 6$ 有相對極小值. 又因爲只有一個臨界數, 此相對極小值亦爲一絕對最小值, 如所求.

因此, 當

$$x = 6$$

且

$$y = \frac{24}{6} = 4$$

時, 有最小面積.

由此導出, 紙張的尺寸爲

$$(6+3) \times (4+2) = 9 \times 6$$

時, 有最小面積

$$A = 9 \cdot 6 = 54 \text{ 吋}^2$$