單元 15: 相關變化率
(課本 §2.8)

設 x 與 y 均爲時間 t 的函數. 若 x 與 y 有關聯, 則它們對時間 t 的變化率亦會呈現某種關係, 如 x 與 y 的關聯爲

$$y = 2x$$

則兩邊均對 t 微分得

$$\frac{dy}{dt} = 2\frac{dx}{dt}$$

呈現出它們對 t 的變化率間的關聯, 此乃暗示, 由一變數的變化率可求得另一變數的變化率, 如

$$\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt}$$

或

$$\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt}$$

本單元探討這種變化率之間的關係, 並稱此種問題爲相關變化率問題 (related-rate problem).

例 1. 設 x 與 y 均爲 t 的可微函數且二者間的關聯爲

$$y = x^2 + 3$$

若 $x = 1$ 時, $\frac{dx}{dt} = 2$, 試求當 $x = 1$ 時, $\frac{dy}{dt}$ 的值.

<解> (1) 由給定的關係式 $y = x^2 + 3$, 求變化率 $\frac{dx}{dt}$ 與 $\frac{dy}{dt}$ 的關係式.

將兩邊對 t 微分, 得

$$\frac{d}{dt}(y) = \frac{d}{dt}(x^2 + 3)$$

因為 x 與 y 均為 t 的可微函數, 故根據廣義冪次規則, 由上式得

$$\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 0 = 2x\frac{dx}{dt}$$

(2) 代入給定的 $x = 1$ 及給定的變化率 $\frac{dx}{dt} = 2$, 得

$$\frac{dy}{dt} = 2(1)(2) = 4$$

註. 解相關變化率問題的數學模型為

(1) 給定方程式:

$$y = x^2 + 3$$

此乃描述 x 與 y 之間的關聯.

(2) 給定變化率: 當 $x = 1$ 時,

$$\frac{dx}{dt} = 2$$

(3) 求: 當 $x = 1$ 時的

$$\frac{dy}{dt}$$

例 2. 設投一小石 (pebble) 入一平靜湖面而形成同心圓的漣漪 (ripple) 時, 其半徑 (radius) r 以固定變化率 1 (呎/秒) 增加. 試問當 r 為 4 (呎) 時, 漣漪面積 A 的變化情形為何?

<解> 由題意知, 方程式為

$$A = \pi r^2 \tag{1}$$

給定變化率為, 當 $r = 4$ 時,

$$\frac{dr}{dt} = 1$$

此乃因爲固定變化率乃相當於對所有的 $t \geq 0$，$\frac{dr}{dt}$ 恆爲 1 (呎/秒)，故在半徑爲 4 呎時的那一時刻 (雖然未知) 的變化率依然爲 1 (呎/秒) 所致.

並求：當 $r = 4$ 時的 $\frac{dA}{dt}$.

過程如下：(i) 將 (1) 式兩邊對 t 微分，得

$$\frac{dA}{dt} = \pi 2r\frac{dr}{dt}$$

此乃因爲 r 爲一 t 的可微函數，並根據廣義冪次規則所致.

(ii) 代入 $r = 4$ 及給定的變化率 $\frac{dr}{dt} = 1$，得

$$\frac{dA}{dt} = \pi 2(4)(1) = 8\pi \ (\text{呎}^2/\text{秒})$$

註. 雖然半徑變化率是對所有的 $t \geq 0$，$\frac{dr}{dt} = 1$，乃一常數，但面積變化率

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt} = 2\pi r(1) = 2\pi r$$

其中半徑 r 隨時間 t 而變，故面積變化率 $\frac{dA}{dt}$ 亦隨 t 而變，不是一常數，與經驗吻合，如下表：

r	1	2	3	4	$\cdots$
$\frac{dA}{dt}$	2π	4π	6π	8π	$\cdots$

例 3. 設以 4.5 (吋^3/分) 的變化率將空氣注入一圓形氣球內. 試求當半徑爲 2 (吋) 時，半徑對時間 t 的變化率.

<解> 令 V 爲氣球的體積，且 r 爲氣球的半徑. 由題意知，方程式爲

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \tag{2}$$

給定變化率爲，對所有的時間 $t \geq 0$,

$$\frac{dV}{dt} = 4.5$$

乃一常數，故亦相當於對於所有的半徑 $r \geq 0$，產生此半徑的時刻 (雖然未知) 的變化率

$$\frac{dV}{dt} = 4.5$$

並求: 當 $r = 2$ (吋) 時的 $\frac{dr}{dt}$.

過程如下: (i) 將 (2) 式兩邊對 t 微分，並在半徑 r 爲 t 的可微函數下，根據廣義冪次規則，得

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi 3r^2\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt}$$

因此,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}$$

(ii) 代入 $r = 2$ 及給定的變化率 $\frac{dV}{dt} = 4.5$, 得

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi(2)^2}(4.5) = \frac{4.5}{16\pi} \approx 0.09 \text{ (吋/分)}$$

註. 因爲

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}$$

故當 $\frac{dV}{dt}$ 爲常數時,

$$t \uparrow \Rightarrow \ r \uparrow \Rightarrow \ \frac{dr}{dt} \downarrow$$

亦即, 半徑變化率隨著時間的增加而愈來愈不明顯, 與經驗相符.

例 4. 設銷售某產品 x 件時, 其利潤

$$P = 500x - \frac{1}{4}x^2$$

若銷售量每天均以 10 件的變化率增加, 試求當售出 500 件時的利潤對於時間 t 的變化率.

<解> 根據題意, 方程式爲

$$P = 500x - \frac{1}{4}x^2 \tag{3}$$

給定變化率爲, 對所有的時間 t,

$$\frac{dx}{dt} = 10 \text{ (件/天)}$$

乃一固定常數, 故對所有的銷售量 $x \geq 0$, 在售出此量的時刻 (雖然未知) 的變化率

$$\frac{dx}{dt} = 10$$

並求: 當 $x = 500$ 件時的 $\frac{dP}{dt}$.

過程如下: (i) 將 (3) 式兩邊對時間 t 微分, 並在銷售量 x 爲時間 t 的可微函數下, 根據廣義冪次規則, 得

$$\frac{dP}{dt} = 500\frac{dx}{dt} - \frac{1}{2}x\frac{dx}{dt}$$

(ii) 代入 $x = 500$ 及給定的變化率 $\frac{dx}{dt} = 10$, 得

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= 500(10) - \frac{1}{2}(500)(10) \\ &= 5000 - 2500 = 2500 \text{ (元/天)}\end{aligned}$$

表示當銷售量爲 500 件時的那一天, 再多經營一天後, 利潤大概會多增加 2500 (元).

註. 於例 4 中, 將利潤對銷售量 x 微分, 得邊際利潤

$$\frac{dP}{dx} = 500 - \frac{1}{2}x$$

此乃表示銷售量由 x 增至 $x+1$ 時, 利潤增加量的近似值. 此外, 由假設每多經營一天, 銷售增加量大概爲

$$\frac{dx}{dt} = 10 \text{ (件/天)}$$

故, 根據常識在銷售量爲 500 件時的那一天, 若再多經營一天, 利潤增加量大概爲

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= \text{(在 500 件時, 每多賣一件的利潤增加量)} \cdot \\ &\qquad \text{(在 500 件時, 每多經營一天的銷售增加量)} \\ &= \frac{dP}{dx}(500) \cdot \frac{dx}{dt} \\ &= \left[500 - \frac{1}{2}(500)\right] \text{ (元/件)} \cdot 10 \text{ (件/天)} \\ &= 2500 \text{ (元/天)}\end{aligned}$$

與例 4 的結果相符, 且第二個等號就是連鎖規則.

例 5. 設某公司以 200 (件/週) 的變化率增加產量, 且

每週的需求函數爲

$$p = 100 - 0.001x$$

試求當 $x = 2000$ 件時, 收益對時間 t 的變化率.

<解> 根據題意, 方程式爲

$$R = xp = 100x - 0.001x^2 \tag{4}$$

給定變化率爲, 對所有的時間 t,

$$\frac{dx}{dt} = 200 \text{ (件/週)}$$

乃一常數, 故對所有的銷售量 $x \geq 0$, 在售出此量的時刻 (雖然未知) 的變化率

$$\frac{dx}{dt}(\text{售出 } x \text{ 件的時刻}) = 200$$

並求: 當 $x = 2000$ 件時的 $\frac{dR}{dt}$.

過程如下: (i) 將 (4) 兩邊對時間 t 微分, 並在銷售量 x 爲時間 t 的可微函數下, 根據廣義冪次規則, 得

$$\frac{dR}{dt} = 100\frac{dx}{dt} - 0.002x\frac{dx}{dt}$$

(ii) 代入 $x = 2000$ 與給定的變化率 $\frac{dx}{dt} = 200$, 得收益對時間 t 的變化率

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= 100(200) - 0.002(2000)(200) \\ &= 20000 - 800 = 19200 \text{ (元/週)}\end{aligned}$$

表示當銷售量爲 2000 件時的那一週, 再多經營一週後, 收益大概會多增加 19200 (元).

註. 如同例 4, 亦可直接以連鎖規則得

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= \frac{dR}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \\ &= (100 - 0.002x)|_{x=2000} \cdot (200) \\ &= [100 - 0.002(2000)] \text{ (元/件)} \cdot \\ &\qquad\qquad 200 \text{ (件/週)} \\ &= (96)(200) = 19200 \text{ (元/週)}\end{aligned}$$