單元 14: 隱微分
(課本 §2.7)

二變數 x 與 y 之間的關係表示法有如下 2 種.

(i) 明確式 (explicit form):

$$y = f(x)$$

如

$$y = 3\sqrt{x} - 5$$

則其導函數

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{-1/2}$$

又如位置函數

$$s = -16t^2 + 4t + 70$$

則速度

$$\frac{ds}{dt} = -32t + 4$$

以及

$$u = 3w - 2w^7 + 6$$

時, 則其導函數

$$\frac{du}{dw} = 3 - 14w^6$$

(ii) 隱藏式 (implicit form):

$$F(x, y) = 0$$

僅以一含 x 與 y 的方程式表示它們間的關係, 而不是明確地以 x 的函數表示 y, 如

$$xy = 1$$

問. y 對 x 的導函數 $\frac{dy}{dx}$ 爲何?

答. 首先, 解 y, 得

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

故,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{-1}) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

又如

$$x^2 - 2y^3 + 4y = 2$$

問. y 對 x 的導函數 $\frac{dy}{dx}$ 爲何?

答. 此時不易解 y, 但可用隱微分 (implicit differentiaton) 求 $\frac{dy}{dx}$, 如下述.

(1) 將等式兩邊均對 x 微分, 並視 y 爲 x 的函數, 得

$$\frac{d}{dx}(x^2 - 2y^3 + 4y) = \frac{d}{dx}(2)$$

亦即,

$$2x - 2(3)y^2\frac{dy}{dx} + 4\frac{dy}{dx} = 0$$

其中等號左邊的第二項乃根據廣義冪次規則以及視 y 爲 x 的函數所致, 等號左邊的第三項乃因爲以隱藏的方式表現 y 爲 x 的函數, 故無法明確地求出導函數, 因而直接以 $\frac{dy}{dx}$ 表示導函數.

(2) 解 $\frac{dy}{dx}$. 將含有 $\frac{dy}{dx}$ 的各項移至等號左邊並提出 $\frac{dy}{dx}$, 其餘各項移至等號右邊, 得

$$\frac{dy}{dx}(4 - 6y^2) = -2x$$

所以,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{4 - 6y^2}$$

這也是以一個隱藏的方式表示導函數 $\frac{dy}{dx}$, 因爲在等號的右邊含有原本就無法以明確的方式表示的函數

y，而不是僅含 x 的數學式，這是先天所致，無法改善，但至少表現出導函數 $\frac{dy}{dx}$ 與 x 和 y 的關係，在應用時需要進一步地求出 x 所對應的 y 值，在許多情況下，這是可接受的.

例 1. 試求橢圓

$$x^2 + 4y^2 = 4 \tag{1}$$

上，過點 $\left(\sqrt{2}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ 的切線.

<解> 首先將此點代入 (1) 式的左邊，得

$$(\sqrt{2}\,)^2 + 4\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 + 4\left(\frac{1}{2}\right) = 4$$

剛好就是 (1) 式的右邊，故此點確實是橢圓上的一點.

接者，以隱微分求 $\frac{dy}{dx}$，如下述.

(1) 將等式兩邊均對 x 微分，並視 y 爲 x 的函數，得

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 4y^2) = \frac{d}{dx}(4)$$

根據廣義冪次規則，由此可導出

$$2x + 8y\frac{dy}{dx} = 0$$

(2) 解 $\frac{dy}{dx}$. 經由移項並同除 $8y$, 得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{8y}=\frac{-x}{4y}$$

最後, 由導函數的意義, 過此點的切線斜率

$$m=\frac{dy}{dx}\left(\sqrt{2},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{4\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

故根據點斜式, 過此點的切線爲

$$y+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}(x-\sqrt{2})$$

或

$$y=\frac{1}{2}x-\sqrt{2}$$

例 2. 設

$$x^2y+y^2x=-2$$

試求 $\frac{dy}{dx}$.

<解> 因爲是以一個方程式隱藏地表示 x 與 y 的關係, 當然可以先嘗試解 y 後, 再求 $\frac{dy}{dx}$, 但經常是不容易解出 y, 因而一個替代的方式乃是直接以隱微分求 $\frac{dy}{dx}$, 如下述.

(1) 將等式兩邊均對 x 微分, 並視 y 爲 x 的函數, 得

$$\frac{d}{dx}(x^2y+y^2x)=\frac{d}{dx}(-2)$$

根據乘法規則與廣義冪次規則, 由上式得

$$2xy+x^2\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}x+y^2(1)=0$$

(2) 解 $\frac{dy}{dx}$. 在等號左邊合併含 $\frac{dy}{dx}$ 的各項, 並將其餘各項移至等號右邊, 得

$$\frac{dy}{dx}(x^2+2yx)=-y^2-2xy$$

因此,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y^2+2xy}{x^2+2xy}$$

例 3. 設某產品的需求函數

$$p=\frac{3}{0.000001x^3+0.01x+1}$$

其中 p 的單位爲元, x 的單位爲千件. 試求當 x 爲 100 時, 銷售量 x 對售價 p 的變化率.

<解> 根據題意乃相當於求 $\frac{dx}{dp}$, 不是求 $\frac{dp}{dx}$, 故直接的作法乃是先解出 x 後, 再求 $\frac{dx}{dp}$, 但卻不容易解 x, 因而替

代的方法乃是在不需解 x 的情況下, 採用隱微分求 $\frac{dx}{dp}$, 如下述.

(1) 爲方便計, 先改寫原式, 得

$$0.000001x^3 + 0.01x + 1 = \frac{3}{p}$$

(2) 將等式兩邊均對 p 微分, 並視 x 爲 p 的函數, 得

$$0.000003x^2\frac{dx}{dp} + 0.01\frac{dx}{dp} = \frac{-3}{p^2}$$

(3) 解 $\frac{dx}{dp}$, 得

$$\frac{dx}{dp}(0.000003x^2 + 0.01) = \frac{-3}{p^2}$$

因此,

$$\frac{dx}{dp} = \frac{-3}{p^2(0.000003x^2 + 0.01)}$$

因爲 $\frac{dx}{dp}$ 並不是明確地以 x 呈現, 故需先求出對應的 p 值, 亦即, 當 $x = 100$ 時,

$$\begin{aligned} p &= \frac{3}{0.000001(100)^3 + 0.01(100) + 1} \\ &= \frac{3}{1+1+1} = 1 \end{aligned}$$

最後, 將 $x = 100$ 及 $p = 1$ 代入 $\frac{dx}{dp}$, 得

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dp}(100,1) &= \frac{-3}{1^2[0.000003(100)^2+0.01]} \\ &= \frac{-3}{0.03+0.01} \\ &= \frac{-3}{0.04} = -75\end{aligned}$$

此乃表示當 $x = 100$ 時, 亦即, 100000 件時, 售價增加 1 元, 會導致需求量減少 75000 件.