單元 10: 變化率-速度與邊際值
(課本 §2.3)

導函數的二個主要應用:

一. 斜率 (slope)

根據定義, 函數 f 的導函數

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

又, 過二點 $(x, f(x))$ 與 $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ 的割線斜率

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

如圖示. 因此, 合併上二式, 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} m_{\text{sec}} \\ &= f \text{ 在點 } (x, f(x)) \text{ 的切線斜率} \end{aligned}$$

其中第二個等號成立乃因爲當 $\Delta x \to 0$ 時,

$$\text{割線} \to \text{切線}$$

因而

$$\text{割線斜率} \to \text{切線斜率}$$

所致, 如圖示.

二. 瞬間變化率 (instantaneous rate of change, 簡稱變化率)

因爲當自變數由 x 改變至 $x+\Delta x$ 時, 應變數所對應的改變乃由 $f(x)$ 至 $f(x+\Delta x)$, 故差商

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\
&= \frac{f \text{ 的變化量}}{x \text{ 的變化量}} \\
&= f \text{ 在區間 } [x, x+\Delta x] \text{ 上的平均變化率}
\end{aligned}$$

因此, 根據定義及上式, 當 $\Delta x \to 0$ 時,

$$x+\Delta x \to x$$

而得出導函數

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (f \text{ 在 } [x, x+\Delta x] \text{ 的平均變化率}) \\
&= f \text{ 在點 } (x, f(x)) \text{ 的瞬間變化率}
\end{aligned}$$

接著, 分別探討變化率在物理及經濟上的意義:

(1) 物理上. 因爲

$$平均速度 = \frac{位置的變化}{時間的變化}$$

故

$$\begin{aligned} 速度 &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \to 0} (平均速度) \\ &= 位置函數的導函數 \end{aligned}$$

例 1. 設一自由落體 (free-falling object), 在忽略空氣的阻力下, 其位置函數爲

$$h(t) = -16t^2 + v_0 t + h_0$$

其中 v_0 爲初速 (initial velocity, 單位: 呎/秒), h_0 爲最初高度 (initial height, 單位: 呎), 如圖示. 因此, 在時間爲 t 秒時的

$$速度 = -32t + v_0$$

今設一跳水選手在時間爲 $t = 0$ 秒時, 在距水面 32 呎高的跳板上, 以 16 呎/秒的速度向上躍下. 試問

(1) 何時此人接觸水面?

(2) 接觸水面時的速度爲何?

<解> 因為初速為 16 呎/秒，最初高度為 32 呎，故此人的位置函數為

$$h(t) = -16t^2 + 16t + 32$$

(a) 因為接觸水面的時間相當於

$$h(t) = 0$$

的時間 t，故令 $h(t) = 0$，解 t，得

$$-16t^2 + 16t + 32 = 0$$

同除 -16，得

$$t^2 - t - 2 = 0$$

因式分解，得

$$(t-2)(t+1) = 0$$

故，

$$t = 2 \text{ 或 } -1 \text{ (不合)}$$

因此，二秒後，接觸水面.

(b) 根據定義，此人在 t 秒後的

$$\begin{aligned} \text{速度} &= h'(t) \\ &= \frac{d}{dt}(-16t^2 + 16t + 32) \\ &= -32t + 16 \end{aligned}$$

因為 2 秒後接觸水面, 故接觸水面的速度為

$$h'(2) = -32(2) + 16 = -48 \text{ 呎/秒}$$

其中的 "$-$" 號表示方向向下.

(2) 經濟上. 令

$$P = \text{總利潤 (total profit)}$$

$$R = \text{總收益 (total revenue)}$$

且

$$C = \text{總成本 (total cost)}$$

則其間的關係為

$$P = R - C$$

定義

$$\begin{aligned} &\text{邊際利潤 (marginal profit)} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \text{利潤對應於產量或銷售量 } x \text{ 的變化率} \\ &= \frac{dP}{dx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{邊際收益 (marginal revenue)} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \text{收益對應於產量或銷售量 } x \text{ 的變化率} \\ &= \frac{dR}{dx} \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} & \text{邊際成本 (marginal cost)} \\ & \stackrel{\text{def}}{=} \quad \text{成本對應於產量或銷售量 } x \text{ 的變化率} \\ & = \quad \frac{dC}{dx} \end{aligned}$$

故當 $x \to x+1$, 亦即, 產量或銷售量由 x 增加一個單位時, 均分別近似於利潤, 收益, 以及成本的眞正變化

$$\Delta P \stackrel{\text{def}}{=} P(x+1) - P(x)$$

$$\Delta R \stackrel{\text{def}}{=} R(x+1) - R(x)$$

$$\Delta C \stackrel{\text{def}}{=} C(x+1) - C(x)$$

如圖示, 也就是說, 當 $x \to x+1$ 時,

$$\frac{dP}{dx} \approx \Delta P, \quad \frac{dR}{dx} \approx \Delta R, \quad \frac{dC}{dx} \approx \Delta C$$

例 2. 設某物品銷售 x 單位的利潤爲

$$P = 0.0002x^3 + 10x$$

(a) 試求產量爲 50 單位時的邊際利潤.

(b) 試求產量由 50 單位增至 51 單位時, 利潤的實際增量 ΔP, 並與 (a) 中的邊際利潤比較.

<解> (a) 根據定義,

$$\text{邊際利潤} = \frac{dP}{dx} = 0.0006x^2 + 10$$

當 $x = 50$ 時, 得

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dx} &= 0.0006(50)^2 + 10 \\ &= 1.5 + 10 = 11.5 \text{ 元/單位} \end{aligned}$$

(b) 當產量 $x = 50$ 時的利潤為

$$\begin{aligned} P(50) &= 0.0002(50)^3 + 10(50) \\ &= 25 + 500 = 525 \text{ 元} \end{aligned}$$

同理, 當產量 $x = 51$ 時的利潤為

$$\begin{aligned} P(51) &= 0.0002(51)^3 + 10(51) \\ &\approx 26.53 + 510 = 536.53 \text{ 元} \end{aligned}$$

因此, 當產量由 50 增加一個單位時的利潤實際增量

$$\Delta P = P(51) - P(50) = 11.53 \text{ 元}$$

近似於當 $x = 50$ 時的邊際利潤

$$\left.\frac{dP}{dx}\right|_{x=50} = 11.5 \text{ 元/單位}$$

故邊際利潤 $\frac{dP}{dx}$ 是實際利潤變化量 ΔP 的一個好估計.

定義. 需求函數 (demand function)

$$p = f(x)$$

乃描述銷售量 x 與售價 p 之間的關係, 則其與總收益 R 的關係爲

$$R = xp$$

例 3. 設某物品的售價爲 10 (元/單位) 時, 一個月可售出 2000 個單位. 爲促銷, 預估每降價 0.25 元, 可多售出 250 單位. 試根據此資訊求需求函數以及總收益.

<解> 設 p 爲新的售價且 x 爲對應的銷售量, 則根據題意, 得

$$\begin{aligned} x &= 2000 + 250\left(\frac{10-p}{0.25}\right) \\ &= 2000 + 1000(10-p) \\ &= 12000 - 1000p, \ p \le 10 \end{aligned}$$

解 p, 得

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{1000}(12000-x) \\ &= 12-\frac{x}{1000},\ x \geq 2000 \end{aligned}$$

或根據題意, 每多售出 250 單位相當於每降 0.25 元, 直接求售價, 得

$$\begin{aligned} p &= 10-0.25\left(\frac{x-2000}{250}\right) \\ &= 10-0.001(x-2000) \\ &= 12-0.001x,\ x \geq 2000 \end{aligned}$$

因此, 總收益

$$R = xp = x\left(12-\frac{x}{1000}\right) = 12x-\frac{x^2}{1000}$$

例 4. 設一速食店銷售漢堡的需求函數

$$p = \frac{1}{20000}(60000-x)$$

且生產 x 個漢堡的成本

$$C = 5000+0.56x,\ 0 \leq x \leq 50000$$

試分別求產量 x 爲 20000, 24400 以及 30000 的利潤與邊際利潤.

<解> 首先，根據常識及題意，收益

$$\begin{aligned} R &= xp \\ &= \frac{1}{20000}(60000x - x^2) \\ &= 3x - \frac{x^2}{20000} \end{aligned}$$

利潤

$$\begin{aligned} P &= R - C \\ &= 3x - \frac{x^2}{20000} - 5000 - 0.56x \\ &= 2.44x - \frac{x^2}{20000} - 5000 \end{aligned}$$

故邊際利潤

$$\frac{dP}{dx} = 2.44 - \frac{x}{10000}$$

因此，(a) 當產量 $x = 20000$ 時，利潤

$$\begin{aligned} & P(20000) \\ = \ & 2.44(20000) - \frac{(20000)^2}{20000} - 5000 \\ = \ & 23800 \end{aligned}$$

且邊際利潤

$$\frac{dP}{dx}(20000) = 2.44 - 2 = 0.44 \text{ 元/單位}$$

(b) 當產量 $x = 24400$ 時, 利潤

$$\begin{aligned} &P(24400) \\ =\ & 2.44(24400) - \frac{(24400)^2}{20000} - 5000 \\ =\ & 24768 \end{aligned}$$

且邊際利潤

$$\frac{dP}{dx}(24400) = 2.44 - 2.44 = 0 \text{ 元/單位}$$

(c) 當產量 $x = 30000$ 時, 利潤

$$\begin{aligned} &P(30000) \\ =\ & 2.44(30000) - \frac{(30000)^2}{20000} - 5000 \\ =\ & 23200 \end{aligned}$$

且邊際利潤

$$\frac{dP}{dx}(30000) = 2.44 - 3 = -0.56 \text{ 元/單位}$$