單元 66: 0/0 與 ∞/∞ 型未定式
(課本 §B.2)

若

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \text{ 且 } \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

則稱極限式

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

爲 $\frac{0}{0}$ 型未定式; 若

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \text{ 且 } \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

則稱極限式

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

爲 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式.

一個處理未定式極限的方法爲下述的羅必達法則.

定理 1. (l'Hôpital's rule) 設 I 爲一含 a 的開區間且可能除了 a 外, f 與 g 在 I 上均可微, 以及對所有 I 中的 x, $g'(x) \neq 0$. 若極限式

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

爲 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式, 則

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

當等號右邊的極限存在或爲無窮大時.

註 1. 羅必達法則亦適用於單邊或在正負無窮遠的極限, 即可將 $x\to a$ 換成 $x\to a^+$, $x\to a^-$, $x\to\infty$ 以及 $x\to-\infty$.

註 2. 使用前, 一定要確認爲 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式; 否則會出錯, 如

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{x}=\frac{1}{0^+}=\infty$$

極限不存在, 不是未定式. 但若不確認, 而冒然使用, 得

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x}{1}=\frac{-0}{1}=0$$

此乃錯誤結果. 條件不合, 不能使用, 即羅必達法則僅適用於 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式極限.

例 1. 試求 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$.

<解> 代 $x = 0$, 得

$$\frac{e^0 - 1}{2(0)} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

故原式爲 $\frac{0}{0}$ 型未定式且由羅必達法則,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

例 2. 試求 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$.

<解> 代 ∞, 得

$$\frac{\ln\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

即原式爲 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式, 故根據羅必達法則,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

例 3. 試求 $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x-1}}$.

<解> 代 $x = 1$, 得

$$\frac{\sin\pi}{\sqrt{1-1}} = \frac{0}{0}$$

即原式爲 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 故由羅必達法則,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^+}\frac{\sin\pi x}{\sqrt{x-1}} &= \lim_{x\to1^+}\frac{\pi\cos\pi x}{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}\\ &= \lim_{x\to1^+}2\pi\sqrt{x-1}\cos\pi x\\ &= 2\pi(0)(-1)=0\end{aligned}$$

例 4. 試求 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{2x}}$.

<解> 代 ∞, 得原式爲 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式, 故

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{2x}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{2e^{2x}} \quad (\text{依然爲 } \tfrac{\infty}{\infty})\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{6x}{4e^{2x}} \quad (\text{依然爲 } \tfrac{\infty}{\infty})\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{6}{8e^{2x}}=0\end{aligned}$$

註. 重複代 ∞, 需使用三次羅必達法則, 才求得極限, 即多次使用羅必達法則是可預見的現象.

例 5. 試求 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^3}{x-\tan x}$.

<解> 代 $x = 0$，得

$$\frac{0^3}{0 - \tan 0} = \frac{0}{0}$$

即原式爲 $\frac{0}{0}$ 型未定式，故根據羅必達法則，

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x - \tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1 - \sec^2 x}$$

代 $x = 0$，得

$$\frac{3(0)^2}{1 - \sec^2 0} = \frac{0}{1 - 1^2} = \frac{0}{0}$$

故再次使用羅必達法則，

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{6x}{-2\sec x \sec x \tan x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{6x}{-2\sec^2 x \tan x} \end{aligned}$$

代 $x = 0$，得

$$\frac{6(0)}{-2(1)^2(0)} = \frac{0}{0}$$

故需再次根據羅必達法則，得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{6}{-4\sec^2 x \tan^2 x - 2\sec^4 x} \\ &= \frac{6}{-4(1)^2(0)^2 - 2(1)^4} = \frac{6}{-2} = -3 \end{aligned}$$

即共使用三次羅必達法則, 才求得極限.

Exercises

若

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \text{ 且 } \lim_{x\to a} g(x)=\infty$$

則稱極限式

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]$$

爲一 $\infty-\infty$ 型未定式, 可採用代數運算轉換成 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式後, 再使用羅必達法則, 例

27. 試求 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

<解> 代 $x=0^+$, 得

$$\begin{aligned}\frac{1}{0^+}-\frac{1}{e^{0^+}-1} &= \infty-\frac{1}{1^+-1}\\ &= \infty-\frac{1}{0^+}=\infty-\infty\end{aligned}$$

即原式爲 $\infty-\infty$ 型未定式, 不可直接使用羅比達法則. 經由通分化簡, 得

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$$

代 $x=0$, 得

$$\frac{e^0-1-0}{0(e^0-1)}=\frac{1-1-0}{0(1-1)}=\frac{0}{0}$$

乃 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 故根據羅必達法則,

$$原式=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{(e^x-1)+xe^x}$$

再代 $x=0$, 得

$$\frac{1-1}{(1-1)+0(1)}=\frac{0}{0}$$

又爲 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 故再根據羅必達法則,

$$\begin{aligned}原式 &= \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}\\ &= \frac{1}{1+1+0}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

29. 試求 $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\tan x-\sec x)$.

<解> 代 $x=\frac{\pi}{2}$, 得 $\pm\infty-\pm\infty$ 型未定式. 經由化簡, 得

$$\begin{aligned}原式 &= \lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{1}{\cos x}\right)\\ &= \lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin x-1}{\cos x}\end{aligned}$$

代 $x=\frac{\pi}{2}$，得

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2}-1}{\cos\frac{\pi}{2}}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

乃 $\frac{0}{0}$ 型未定式，故根據羅必達法則，

$$\text{原式}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{-\sin x}=\frac{0}{-1}=0$$

若

$$\lim_{x\to a}f(x)=1 \text{ 且 } \lim_{x\to a}g(x)=\pm\infty$$

則稱極限式

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$$

為 1^∞ 型未定式，可採用對指轉換及顛倒轉換將原式表成 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式後，再使用羅必達法則，例

31. 試求 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

<解> 代 $x=\infty$，得

$$\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^\infty=(1+0)^\infty=1^\infty$$

乃 1^{∞} 型未定式. 首先，對指轉換，得

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

代 $x=\infty$，得指數部分

$$\infty\ln\left(1+\frac{1}{\infty}\right)=\infty\ln 1=\infty\cdot 0$$

乃 $\infty\cdot 0$ 未定式. 接著，顛倒轉換，得

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

代 $x=\infty$，得

$$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{\infty}\right)}{\frac{1}{\infty}}=\frac{\ln 1}{0}=\frac{0}{0}$$

乃 $\frac{0}{0}$ 未定式，符合羅必達法則的條件. 因此，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+1/x)}{1/x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\\ &= \frac{1}{1+0}=1\end{aligned}$$

最後, 根據上述的對指轉換, 連續函數的極限性質及顚倒轉換, 並代入, 得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \\ &= e^{\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \\ &= e^1 = e\end{aligned}$$

33. F, 直接代入 $x = 0$,

$$\lim_{x\to 0} = \frac{0}{e^0} = \frac{0}{1} = 0$$

34. F, 因爲

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

35. F, 因爲

$$\lim_{x\to 0} x = \lim_{x\to 0} 2x = 0$$

且

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

存在.

36. T, 因爲

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{L}{M}$$

13. 試求 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\tan^3 x}$.

<解> 代 $x=0$, 得

$$\frac{0-0(1)}{0^3}=\frac{0}{0}$$

故根據羅必達法則,

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{3\tan^2 x\sec^2 x}$$

代 $x=0$, 得

$$\frac{1-1+0(0)}{3(0)^2(1)^2}=\frac{0}{0}$$

再根據羅必達法則,

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{6\tan x\sec^4 x+6\tan^3 x\sec^2 x}$$

代 $x = 0$, 得

$$\frac{0 + 0(1)}{6(0)(1)^4 + 6(0)^3(1)^2} = \frac{0}{0}$$

再一次使用羅必達法則, 分子的導函數爲

$$\cos x + \cos x - x \sin x = 2\cos x - x \sin x$$

且分母的導函數爲

$$\begin{aligned} & 6\sec^6 x + 24\tan^2 x \sec^4 x \\ & \qquad + 18\tan^2 x \sec^4 x + 12\tan^4 x \sec^2 x \\ = \ & 6\sec^6 x + 42\tan^2 x \sec^4 x \\ & \qquad + 12\tan^4 x \sec^2 x \end{aligned}$$

且

$$原式 = \frac{2 - 0}{6 + 0 + 0} = \frac{1}{3}$$

15. 試求 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$.

<解> 代 $x = \infty$, 得 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式, 故根據羅必達法則,

$$原式 = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{2} = \infty$$

18. 試求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{1/2}-x^{1/3}}{x-1}$.

<解> 代 $x=1$, 得 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 符合羅必達法則條件, 故

$$\text{原式}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

19. 試求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x^2}$.

<解> 代 $x=\infty$, 得 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式, 故根據羅必達法則,

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}}{2x}\\ &= \frac{\frac{1}{1+0}}{\infty}=0\end{aligned}$$

20. 試求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a^{\ln x}-x}{\ln x}$.

代 $x=1$, 得

$$\frac{a^{\ln 1}-1}{\ln 1}=\frac{a^0-1}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

乃 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 故

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\ln a)a^{\ln x}\cdot\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}} \\
&= \frac{\ln a - 1}{1} = \ln a - 1
\end{aligned}$$

21. 試求 $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+2}+x}{\sqrt[3]{2x+1}+1}$.

<解> 代 $x=-1$, 得

$$\frac{\sqrt{1}-1}{\sqrt[3]{-1}+1} = \frac{1-1}{-1+1} = \frac{0}{0}$$

乃 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 故

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to -1}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+2}}+1}{\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}} \\
&= \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{2}{3(1)}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

22. 試求 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+1)}{\cos x - 1}$.

<解> 代 $x=0$, 得

$$\ln(0+1)\cos 0 - 1 = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0}$$

乃 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 故

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^2+1}(2x)}{-\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x}{(\sin x)(x^2+1)}$$

代 $x=0$, 得 $\frac{0}{0}$, 故再根據羅必達法則,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x\to 0} \frac{-2}{(\cos x)(x^2+1)+2x\sin x} \\ &= \frac{-2}{1(0+1)+0} = \frac{-2}{1} = -2 \end{aligned}$$

23. 試求 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2}+x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

<解> 代 $x=0$, 得

$$\frac{e^0+0-1}{1-\sqrt{1-0}} = \frac{1+0-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

即原式爲 $\frac{0}{0}$ 型未定式. 故

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2xe^{x^2}+1}{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

24. 試求 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\tan x}{x^2}$.

<解> 代 $x=0$, 得

$$\frac{\ln 1-\tan 0}{0}=\frac{0-0}{0}=\frac{0}{0}$$

乃 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 故根據羅必達法則,

$$\text{原式}=\frac{\frac{1}{1+x}-\sec^2 x}{2x}$$

再代 $x=0$, 得

$$\frac{1-\sec^2 0}{2(0)}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

故再使用一次羅必達法則,

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{(1+x)^2}-2\sec^2 x\tan x}{2}\\ &= \frac{-1-0}{2}=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

25. 試求 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{e^x-e^{-x}-2x}$.

<解> 代 $x=0$, 得

$$\frac{\sin 0-0}{e^0-e^{-0}-2(0)}=\frac{0-0}{1-1-0}=\frac{0}{0}$$

乃 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 故根據羅必達法則,

$$原式 = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{e^x + e^{-x} - 2}$$

代 $x = 0$, 得

$$\frac{\cos 0 - 1}{e^0 + e^0 - 2} = \frac{1-1}{1+1-2} = \frac{0}{0}$$

故再根據羅必達法則,

$$原式 = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{e^x - e^{-x}}$$

代 $x = 0$, 得

$$\frac{-\sin 0}{e^0 - e^{-0}} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0}$$

需再使用一次羅必達法則, 得

$$原式 = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{e^x + e^{-x}} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

26. 試求 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos x}$.

<解> 代 $x = 0$, 得

$$\frac{e^0 - 1}{1 - \cos 0} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

乃 $\frac{0}{0}$ 未定式，故根據羅必達法則，

$$原式 = \lim_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2}}{\sin x}$$

代 $x = 0$，得 $\frac{0}{0}$ 型未定式，故再根據羅必達法則，

$$原式 = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}}{\cos x} = \frac{2+0}{1} = 2$$

28. 試求 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-\cos x}\right)$.

<解> 代 $x = 0^+$，得

$$\begin{aligned} \frac{1}{0^+} - \frac{1}{1-\cos 0^+} &= \infty - \frac{1}{1-1^-} \\ &= \infty - \frac{1}{0^+} = \infty - \infty \end{aligned}$$

乃 $\infty - \infty$ 型未定式，故通分化簡，得

$$原式 = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x - x}{x(1-\cos x)}$$

代 $x = 0$，得

$$\frac{1-\cos 0 - 0}{0(1-\cos 0)} = \frac{1-1-0}{0(1-1)} = \frac{0}{0}$$

乃 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 符合羅必達法則的條件, 故

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - 1}{(1-\cos x) + x\sin x} \\ &= \frac{-1}{0^+ + 0^+} = -\infty\end{aligned}$$

29. 試求 $\lim\limits_{t\to\pi/2} (\tan t - \sec t)$.

<解> 代 $t = \frac{\pi}{2}$, 得

$$\tan\frac{\pi}{2} - \sec\frac{\pi}{2} = \infty - \infty$$

乃 $\infty - \infty$ 型未定式, 故通分化簡, 得

$$\text{原式} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin t - 1}{\cos t}$$

代 $t = \frac{\pi}{2}$, 得

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2} - 1}{\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

乃 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 故根據羅必達法則,

$$\text{原式} = \lim_{t\to\pi/2} \frac{\cos t}{-\sin t} = \frac{0}{-1} = 0$$

30. 試求 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$.

<解> 當 $x\to 1^+$, 得

$$\frac{1}{0^+}-\frac{1}{0^+}=\infty-\infty$$

且當 $x\to 1^-$, 得

$$\frac{1}{0^-}-\frac{1}{0^-}=-\infty+\infty$$

故原式爲 $\infty-\infty$ 型未定式. 通分化簡, 得

$$\text{原式}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$$

代 $x=1$, 得

$$\frac{1-1-\ln 1}{(1-1)\ln 1}=\frac{1-1-0}{0(0)}=\frac{0}{0}$$

乃 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 故根據羅必達法則,

$$\text{原式}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

再代 $x=1$, 得

$$\frac{1-1}{\ln 1+(1-1)}=\frac{0}{0+0}=\frac{0}{0}$$

故再使用一次羅必達法則, 得

$$\text{原式} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

32. 試求 $\displaystyle\lim_{m\to\infty} P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}$.

<解> 代 $m=\infty$, 得

$$\left(1+\frac{r}{\infty}\right)^{\infty(t)} = (1+0)^{\infty} = 1^{\infty}$$

即原式為 1^{∞} 型未定式. 故根據對指轉換與連續函數的極限性質,

$$\begin{aligned}\text{原式} &= P\lim_{m\to\infty} e^{mt\ln\left(1+\frac{r}{m}\right)} \\ &= Pe^{t\lim_{m\to\infty} m\ln\left(1+\frac{r}{m}\right)}\end{aligned}$$

再根據顛倒轉換, 上式中指數部分的極限,

$$\begin{aligned}&\lim_{m\to\infty} m\ln\left(1+\frac{r}{m}\right) \\ = &\lim_{m\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{r}{m}\right)}{\frac{1}{m}} = \lim_{m\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{r}{m}}\left(-\frac{r}{m^2}\right)}{-\frac{1}{m^2}} \\ = &\lim_{m\to\infty}\frac{r}{1+\frac{r}{m}} = \frac{r}{1+0} = r\end{aligned}$$

代入, 得

$$\lim_{m\to\infty} P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} = Pe^{rt}$$