單元 54: 期望值與標準差
(課本 §10.2)

設 X 為一離散隨機變數且可能值為

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

以及對應的機率為

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

即

$$P(X = x_i) = p_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

並記作

$$X \sim P(X = x_i) = p_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

則 X 的期望值 (expected value)

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$$

例 1,2. 設 X 為二分鐘間隔內, 等候的車輛數且觀察值及對應的機率為

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
頻率	2	9	16	12	8	6	4	2	1
機率	$\frac{2}{60}$	$\frac{9}{60}$	$\frac{16}{60}$	$\frac{12}{60}$	$\frac{8}{60}$	$\frac{6}{60}$	$\frac{4}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{1}{60}$

因爲共記錄

$$2+9+16+12+8+6+4+2+1=60$$

次, 故二分鐘間隔內的平均車輛數 (average, mean)

$$\begin{aligned} A &= \frac{0\cdot 2+1\cdot 9+2\cdot 16+\cdots+7\cdot 2+8\cdot 1}{60} \\ &= 0\left(\frac{2}{60}\right)+1\left(\frac{9}{60}\right)+2\left(\frac{16}{60}\right) \\ &\qquad +\cdots+7\left(\frac{2}{60}\right)+8\left(\frac{1}{60}\right) \\ &= E(X)\approx 3.1 \end{aligned}$$

設連續隨機變數 X 的機率密度函數爲

$$f(x),\ a\le x\le b$$

記作

$$X\sim f(x),\ a\le x\le b$$

將 $[a,b]$ n 等分, 得 Δx 與右端點 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 以及 X 在第 i 個子區間 $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,\ldots,n$ 內的機率

$$P(x_{i-1}\le X\le x_i)=\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx\approx f(x_i)\Delta x$$

如圖示.

故 X 在 $[a,b]$ 的平均值

$$\begin{aligned} A &= x_1 f(x_1)\Delta x + x_2 f(x_2)\Delta x \\ &\qquad\qquad + \cdots + x_n f(x_n)\Delta x \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)\Delta x \end{aligned}$$

乃 $xf(x)$ 在 $[a,b]$ 上的黎曼和.

因此，取極限，可定義 X 的期望值

$$E(X) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)\Delta x = \int_a^b x f(x)\,dx$$

也就是說，

定義. 設連續隨機變數

$$X \sim f(x),\ a \le x \le b$$

則 X 的期望值

$$E(X) = \int_a^b x f(x)\,dx$$

例 3. 設連續隨機變數

$$X \sim ke^{-kx},\ 0 \le x < \infty$$

試證 $E(X)=\frac{1}{k}$.

<解> 根據定義以及取

$$u=x, \quad dv=e^{-kx}dx$$

與

$$du=dx, \quad v=-\frac{1}{k}e^{-kx}$$

的代入法, X 的期望值

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^\infty xf(x)dx=\int_0^\infty xke^{-kx}dx \\
&= k\lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-kx}dx \\
&= k\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{k}xe^{-kx}\Big|_0^b+\frac{1}{k}\int_0^b e^{-kx}dx\right) \\
&= k\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{k}xe^{-kx}-\frac{1}{k^2}e^{-kx}\Big|_0^b\right) \\
&= k\lim_{b\to\infty}\left[\left(-\frac{1}{k}be^{-kb}-\frac{1}{k^2}e^{-kb}\right)\right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left.-\left(0-\frac{1}{k^2}\right)\right] \\
&= k\left(-\frac{1}{k}(0)-\frac{1}{k^2}(0)+\frac{1}{k^2}\right)=\frac{1}{k}
\end{aligned}$$

其中倒數第二等式中, 第一項為 0 乃因為

$$\lim_{b\to\infty}be^{-kb}=\lim_{b\to\infty}\frac{b}{e^{kb}}=0$$

即多項式趨近於無窮大的速度遠小於指數函數, 如圖示.

事實上, 對於 $k < 0$ 且 $n \geq 0$,

$$\lim_{x\to\infty} x^n e^{kx} = 0$$

待介紹羅必達法則時, 詳細推導.

例 4. 設到達班機的間隔時間 X 是期望值爲 10 分鐘的指數隨機變數.

(a) 試求 X 的機率密度函數.

(b) 試求間隔時間介於 6 到 8 分鐘的機率.

(c) 試求間隔時間超過 15 分鐘的機率.

<解> (a) 由例 3, 因爲

$$E(X) = \frac{1}{k} = 10$$

得 $k = 0.1$. 故根據指數隨機變數的標準式, 指數隨機變數 X 的 pdf 爲

$$f(x) = 0.1e^{-0.1x},\ 0 \leq x < \infty$$

(b) 間隔時間介於 6 至 8 分鐘的機率

$$\begin{aligned} P(6 \leq X \leq 8) &= \int_6^8 0.1e^{-0.1x}dx \\ &= 0.1\left(-\frac{1}{0.1}\right)e^{-0.1x}\Big|_6^8 \\ &= -e^{-0.1x}\Big|_6^8 \\ &= e^{-0.6} - e^{-0.8} \\ &\approx 0.10 \end{aligned}$$

(c) 間隔時間超過 15 分鐘的機率

$$\begin{aligned} P(X > 15) &= \int_{15}^{\infty} 0.1e^{-0.1x}dx \\ &= \lim_{b\to\infty}\int_{15}^{b} 0.1e^{-0.1x}dx \\ &= -\lim_{b\to\infty} e^{-0.1x}\Big|_{15}^{b} \\ &= -\lim_{b\to\infty}\left(e^{-0.1b} - e^{-1.5}\right) \\ &= -(0 - e^{-1.5}) = e^{-1.5} \\ &\approx 0.22 \end{aligned}$$

設離散隨機變數

$$X \sim P(X = x_i) = p_i,\ \ i = 1, \ldots, n$$

且 $E(X) = \mu$, 則 X 的變異數 (variance)

$$\mathrm{Var}(X) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 - \mu)^2 p_1 + (x_2 - \mu)^2 p_2 + \cdots + (x_n - \mu)^2 p_n$$

用以度量偏離 μ (中心值) 的程度, 單位爲 X 單位的平方.

隨機變數 X 的標準差 (standard deviation)

$$\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

與 X 同單位.

例 5,6. 設隨機變數 X 與 Y 的可能值與機率分布如表

x	1	2	3	4
$P(X = x)$	0.05	0.075	0.2	0.375
x	5	6	7	
$P(X = x)$	0.15	0.1	0.05	

與

y	1	2	3	4
$P(Y = y)$	0.2	0.15	0.1	0.15
y	5	6	7	
$P(Y = y)$	0.05	0.1	0.25	

則隨機變數 X 的期望值

$$\mu_X = 1(0.05) + 2(0.075) + \cdots + 7(0.05) = 4$$

且變異數

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= (1-4)^2(0.05) + (2-4)^2(0.075) \\ &\qquad + \cdots + (7-4)^2(0.05) \\ &= 1.95 \end{aligned}$$

又隨機變數 Y 的期望值

$$\mu_Y = 1(0.2) + 2(0.15) + \cdots + 7(0.25) = 4$$

且變異數

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Y) &= (1-4)^2(0.2) + (2-4)^2(0.15) \\ &\qquad + \cdots + (7-4)^2(0.25) \\ &= 5.2 \end{aligned}$$

故 Y 較 X 分散, 雖然有相同的中心值.

最後, 標準差分別爲

$$\sigma_X = \sqrt{1.95} \approx 1.40$$

與

$$\sigma_Y = \sqrt{5.2} \approx 2.28$$

例 7. 設 X 與 Y 分別爲品牌 A 與品牌 B 洋芋片的每盒重量如下表

x	15.8	15.9	16.0	16.1	16.2
次數	1	2	4	2	1
$P(X=x)$	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

與

y	15.7	15.8	15.9	16.0	16.1	16.2	16.3
次數	2	1	1	1	2	2	1
$P(Y=y)$	0.2	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.1

則期望值分別爲

$$\begin{aligned}\mu_X &= 15.8(0.1)+15.9(0.2)\\ &\qquad +\cdots+16.2(0.1)=16\end{aligned}$$

與

$$\begin{aligned}\mu_Y &= 15.7(0.2)+15.8(0.1)\\ &\qquad +\cdots+16.3(0.1)=16\end{aligned}$$

以及變異數分別爲

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= (15.8-16)^2(0.1)\\ &\quad +(15.9-16)^2(0.2)\\ &\qquad +\cdots+(16.2-16)^2(0.1)\\ &= 0.012\end{aligned}$$

與

$$\begin{aligned}\text{Var}(Y) &= (15.7-16)^2(0.2) \\ &\quad +(15.8-16)^2(0.1) \\ &\qquad +\cdots+(16.3-16)^2(0.1) \\ &= 0.042\end{aligned}$$

故標準差分別為

$$\sigma_X = \sqrt{0.012} \approx 0.11$$

與

$$\sigma_Y = \sqrt{0.042} \approx 0.20$$

即有相同的平均重量, 但品牌 B 的重量較分散 (widely dispersed).

設連續隨機變數 X 的機率密度函數為

$$f(x),\ \ a \le x \le b$$

且期望值 $E(X) = \mu$, 則 X 的變異數

$$\text{Var}(X) = \int_a^b (x-\mu)^2 f(x)dx$$

且標準差

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}X}$$

註. 設連續隨機變數 $X \sim f(x), a \leq x \leq b$ 且期望值為 μ. 變異數的另一公式為

$$\text{Var}(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - \mu^2$$

<證> 根據定義,

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X) &= \int_a^b (x-\mu)^2 f(x)dx \\
&= \int_a^b (x^2 - 2x\mu + \mu^2) f(x)dx \\
&= \int_a^b x^2 f(x)dx - 2\mu \int_a^b x f(x)dx \\
&\qquad + \mu^2 \int_a^b f(x)dx \\
&= \int_a^b x^2 f(x)dx - 2\mu(\mu) + u^2(1) \\
&= \int_a^b x^2 f(x)dx - \mu^2
\end{aligned}$$

例 8,9. 設隨機變數 X 的機率密度函數為

$$f(x) = \frac{32}{15x^3},\ 1 \leq x \leq 4$$

試求隨機變數 X 的期望值 μ 與變異數 Var(X) 以及標準差 σ.

<解> 根據定義，X 的期望值

$$\begin{aligned}\mu &= E(X)=\int_1^4 xf(x)dx=\int_1^4 \frac{32}{15}\frac{1}{x^2}dx\\ &= -\frac{32}{15}\frac{1}{x}\bigg|_1^4=-\frac{32}{15}\left(\frac{1}{4}-1\right)\\ &= \left(-\frac{32}{15}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{8}{5}\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\int_1^4 x^2 f(x)dx &= \int_1^4 \frac{32}{15}\frac{1}{x}dx=\frac{32}{15}\ln|x|\bigg|_1^4\\ &= \frac{32}{15}\ln 4\end{aligned}$$

因此，變異數

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \frac{32}{15}\ln 4-\left(\frac{8}{5}\right)^2=\frac{32}{15}\ln 4-\frac{64}{25}\\ &= \frac{32}{15}\ln 4-\frac{192}{75}=\frac{32}{15}\left(\ln 4-\frac{6}{5}\right)\\ &\approx 0.40\end{aligned}$$

且標準差

$$\sigma=\sqrt{0.40}\approx 0.63$$

Exercises

11. 設隨機變數

$$X \sim f(x) = \frac{3}{x^4},\ 1 \leq x < \infty$$

試求 $E(X)$ 與 $\text{Var}(X)$ 以及標準差 σ.

<解> 根據定義, 期望值

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_1^\infty x\left(\frac{3}{x^4}\right)dx = \int_1^\infty \frac{3}{x^3}dx \\ &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{3}{x^3}dx \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{3}{2}\frac{1}{x^2}\Big|_1^b\right) \\ &= -\frac{3}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^2}-1\right) = -\frac{3}{2}(0-1) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} &\int_1^\infty x^2\left(\frac{3}{x^4}\right)dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{3}{x^2}dx \\ &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{3}{x}\Big|_1^b\right) = -3\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b}-1\right) \\ &= -3(0-1) = 3 \end{aligned}$$

因此, 根據變異數的公式,

$$\text{Var}(X) = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

且標準差

$$\sigma = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

26. 設隨機變數

$$X \sim f(x) = ax^2 + bx,\ 0 \le x \le 1$$

且 $E(X) = 0.6$. 試求 a 與 b.

<解> 由機率密度函數的定義, 得

$$\int_0^1 (ax^2 + bx)dx = 1$$

即

$$\frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2\Big|_0^1 = \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b = 1$$

同乘 6, 得

$$2a + 3b = 6 \tag{1}$$

接著, 由期望值的定義, 得

$$E(X) = \int_0^6 xf(x)dx = \int_0^1 (ax^3 + bx^2)dx = 0.6$$

即

$$\frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b = 0.6$$

同乘 12, 得

$$3a + 4b = 7.2 \tag{2}$$

由 (1)×3 以及 (2)×3, 得

$$\begin{aligned} 6a + 9b &= 18 \\ 6a + 8b &= 14.4 \end{aligned}$$

兩式相減, 得

$$b = 18 - 14.4 = 3.6$$

代入 (1) 式, 得

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}[6 - 3(3.6)] = \frac{1}{2}(6 - 10.8) \\ &= \frac{-4.8}{2} = -2.4 \end{aligned}$$

25. 設隨機變數

$$X \sim f(x) = ax + \frac{b}{x},\ 1 \le x \le e$$

且 $E(X) = 2$. 試求 a 與 b.

<解> 根據機率密度函數的定義,

$$\int_1^2 \left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = 1$$

即

$$\frac{1}{2}ax^2 + b \ln |x| \Big|_1^e = \left(\frac{1}{2}ae^2 + b\right) - \frac{1}{2}a = 1$$

同乘 2, 得

$$ae^2 + 2b - a = 2$$

合併整理, 得

$$(e^2 - 1)a + 2b = 2 \tag{3}$$

接著, 根據期望值的定義,

$$\int_1^e x\left(ax + \frac{b}{x}\right)dx = \int_1^e (ax^2 + b)dx = 2$$

即

$$\frac{1}{3}ax^3 + bx\Big|_1^e = \frac{1}{3}ae^3 + be - \frac{1}{3}a - b = 2$$

同乘 3, 得

$$ae^3 + 3be - a - 3b = 6$$

合併整理, 得

$$(e^3 - 1)a + 3(e - 1)b = 6 \tag{4}$$

由 (3)×3$(e-1)$ 以及 (4)×2, 得

$$\begin{aligned} 3(e-1)(e^2-1)a + 6(e-1)b &= 6(e-1) \\ 2(e^3-1)a + 6(e-1)b &= 12 \end{aligned}$$

兩式相減並化簡，得

$$(e-1)(3e^2-3-2e^2-2e-2)a = 6(e-3)$$

故

$$a = \frac{6(e-3)}{(e-1)(e^2-2e-5)} \approx 0.3228$$

代入 (3) 式，得

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2}\left[2-(e^2-1)\frac{6(e-3)}{(e-1)(e^2-2e-5)}\right] \\ &= 1-\frac{3(e-3)(e+1)}{e^2-2e-5} = \frac{-2e^2+4e+4}{e^2-2e-5} \\ &= \frac{-2(e^2-2e-2)}{e^2-2e-5} \approx -0.0312 \end{aligned}$$

27. 試求 a，b 與 c 需滿足的條件，使得

$$f(x) = e^{-ax}(bx+c)$$

爲一定義在 $[0,\infty)$ 上的機率密度函數.

<解> 根據機率密度函數的定義，

$$\int_0^\infty e^{-ax}(bx+c)dx = 1$$

即根據瑕積分的定義以及取

$$u = bx+c, \quad dv = e^{-ax}dx$$

與

$$du = bdx, \quad v = -\frac{1}{a}e^{-ax}$$

的分部積分，得

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}\int_0^k e^{-ax}(bx+c)dx \\
= &\lim_{k\to\infty}\left[-\frac{1}{a}(bx+c)e^{-ax}\Big|_0^k + \frac{b}{a}\int_0^k e^{-ax}dx\right] \\
= &\lim_{k\to\infty}\left[-\frac{bx+c}{a}e^{-ax} - \frac{b}{a^2}e^{-ax}\Big|_0^k\right] \\
= &\lim_{k\to\infty}\left[\left(-\frac{bk+c}{a}e^{-ak} - \frac{b}{a^2}e^{-ak}\right) + \frac{c}{a} + \frac{b}{a^2}\right] \\
= &\ 1
\end{aligned}$$

接著，當 $a > 0$ 時，由於多項式函數遠小於指數函數，即

$$\lim_{k\to\infty} p(k)e^{-ak} = \lim_{k\to\infty}\frac{p(k)}{e^{ak}} = 0$$

其中 $p(k)$ 爲一多項式，故由上式得

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-ax}(bx+c)dx &= (-0-0) + \frac{c}{a} + \frac{b}{a^2} \\
&= \frac{ac+b}{a^2} = 1
\end{aligned}$$

即 $ac+b = a^2$. 另 $f(x)$ 需非負，即

$$bx + c \ge 0, \ x \ge 0$$

得 $b \geq 0$ 且 $c \geq 0$. 綜合上述, 得 a, b 與 c 需滿足

$$a > 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0 \text{ 且 } ac + b = a^2$$

34. F

35. T