單元 48: 二重積分的應用
(課本 §8.8)

一. 實體的體積. 設 f 在 R 上非負且連續, 則由上界曲面 (surface) $z = f(x, y)$ 與下界平面區域 R 所圍出的實體體積

$$V = \iint_R f(x, y)dA$$

如圖示.

例 1. 試求由上界 $z = f(x, y) = y$ 與下界

$$R : y = \sqrt{1 - x^2},\ 0 \le x \le 1$$

所圍出的實體體積.

<解> 兩邊平方, 得

$$R : y = \sqrt{1 - x^2}, 0 \le x \le 1, y \ge 0$$

等價於

$$x^2 + y^2 = 1, 0 \le x \le 1, y \ge 0$$

乃第一象限內的四分之一單位圓且爲垂直型區域 (即對應的積分次序爲 $dydx$), 如圖示.

又上界 $z = y$ 在 R 上非負且連續, 故體積

$$\begin{aligned} V &= \iint_R y\,dA = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} y^2 \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x^2)\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}x^3 \right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

二. 城市人口數. 設 R 為一城市區域, $f(x, y)$ 為 R 上, 在點 (x, y) 的人口密度. 將區域 R 分割, 得子區間長度 $\Delta x = \frac{b-a}{m}$, $\Delta y = \frac{d-c}{n}$ 以及 mn 個子矩形區域, 如圖示. 則在第 i 塊小區域的人口數

$$A_i \approx \underbrace{f(x_i, y_i)\Delta x \Delta y}_{\text{密度}\times\text{面積}}, \ i = 1, \ldots, mn$$

得總人口數

$$A \approx \sum_{i=1}^{mn} f(x_i, y_i)\Delta x \Delta y$$

乃密度函數 f 在 R 上的黎曼和.

因此, 根據二重積分的定義, 總人口數

$$\begin{aligned} A &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{mn} f(x_i, y_i)\Delta x \Delta y \\ &= \iint_R f(x,y)\,dA \end{aligned}$$

例 2. 設城市區域爲

$$R = \{(x,y) | -10 \le x \le 10, -5 \le y \le 5\}$$

且人口密度爲

$$f(x,y) = 10,000e^{-0.2|x|-0.1|y|}$$

試求此城市的人口數.

<解> 首先, R 對稱於 x-軸與 y-軸, 如圖示. 又

$$\begin{aligned} f(x,-y) &= 10000e^{-0.2|x|-0.1|-y|} \\ &= 10000e^{-0.2|x|-0.1|y|} = f(x,y) \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} f(-x,y) &= 10000e^{-0.2|-x|-0.1|y|} \\ &= 10000e^{-0.2|x|-0.1|y|} = f(x,y) \end{aligned}$$

故 f 亦對稱於 x-軸與 y-軸.

在積分區域 R 與被積函數 f 均對稱於 x-軸與 y-軸下, 可去絕對值, 方便計算, 而得此城市的人口數

$$
\begin{aligned}
A &= 4(\text{第一象限內的人口數}) \\
&= 4\int_0^{10}\int_0^5 10000e^{-0.2x-0.1y}dydx \\
&= 4\int_0^{10}\left(10000(-10)e^{-0.2x-0.1y}\Big|_0^5\right)dx \\
&= 4\int_0^{10} -100,000e^{-0.2x}(e^{-0.5}-1)dx \\
&= 400,000(1-e^{-0.5})\int_0^{10} e^{-0.2x}dx \\
&= 400,000(1-e^{-0.5})(-5)e^{-0.2x}\Big|_0^{10} \\
&= -2,000,000(1-e^{-0.5})(e^{-2}-1) \\
&= 2,000,000(1-e^{-0.5})(1-e^{-2}) \\
&\approx 680,438
\end{aligned}
$$

三. 函數的平均值.

複習. 設 f 在 $[a,b]$ 上可積, 則平均值

$$A = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

此乃因爲 n 等分 $[a,b]$, 得 $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, 並在每一子區間內任取一點, 得代表點 $x_1,\ldots,x_n$, 如圖示, 則 f 的

平均值

$$
\begin{aligned}
A &\approx \frac{1}{n}[f(x_1)+\cdots+f(x_n)] \\
&= \frac{1}{n\Delta x}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x
\end{aligned}
$$

其中累加和乃 f 在 $[a,b]$ 上的黎曼和. 故取極限並根據定積分定義, 可定義 f 在 $[a,b]$ 的平均值

$$
\begin{aligned}
A &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx
\end{aligned}
$$

推廣. 設 f 在平面區域 R 上可積. 分割 R, 得子區間長度 $\Delta x = \frac{b-a}{m}$ 與 $\Delta y = \frac{d-c}{n}$, 並在每一子矩形區域內任取一點, 得代表點 $(x_1,y_1),\ldots,(x_{mn},y_{mn})$, 如圖示, 則此 mn 個代表點函數值的平均值

$$
\begin{aligned}
A_{mn} &= \frac{1}{mn}[f(x_1,y_1)+\cdots+f(x_{mn},y_{mn})] \\
&= \frac{1}{mn\Delta x\Delta y}\sum_{i=1}^{mn} f(x_i,y_i)\Delta x\Delta y
\end{aligned}
$$

其中累加和乃雙變數函數 f 在 R 上的黎曼和. 又上式中的分母

$$
mn\Delta x\Delta y = \sum_{i=1}^{mn} 1\Delta x\Delta y
$$

乃雙變數常數函數 1 在 R 上的黎曼和. 故取極限並根據二重積分的定義，可定義 f 在 R 上的平均值

$$\begin{aligned}
A &\overset{\text{def}}{=} \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{mn\Delta x\Delta y}\sum_{i=1}^{mn} f(x_i,y_i)\Delta x\Delta y \\
&= \frac{\displaystyle\lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{mn} f(x_i,y_i)\Delta x\Delta y}{\displaystyle\lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{mn} 1\Delta x\Delta y} \\
&= \frac{\displaystyle\iint_R f(x,y)dA}{\displaystyle\iint_R dA} = \frac{\displaystyle\iint_R f(x,y)dA}{R\text{ 的面積}}
\end{aligned}$$

例 3. 試求 $f(x,y)=xy$ 在由 $y=e^x$ 於 $[0,1]$ 上圍出的平面區域 R 上的平均值.

<解> 如圖示，R 乃一垂直型平面區域

$$R: 0\le y\le e^x, 0\le x\le 1$$

故 R 的

$$\begin{aligned}
\text{面積} &= \iint_R dA = \int_0^1\int_0^{e^x} dydx = \int_0^1 \left(y\Big|_0^{e^x}\right)dx \\
&= \int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e-1
\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\iint_R f(x,y)dA &= \iint_R xy dA = \int_0^1 \int_0^{e^x} xy dy dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}xy^2\Big|_0^{e^x} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}xe^{2x}dx \end{aligned} \qquad (1)$$

接著, 根據分部積分, 取

$$u = \frac{1}{2}x, \quad dv = e^{2x}dx$$

得

$$du = \frac{1}{2}dx, \quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

以及不定積分

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2}xe^{2x}dx &= \frac{1}{4}xe^{2x} - \int \frac{1}{4}e^{2x}dx \\ &= \frac{1}{4}xe^{2x} - \frac{1}{8}e^{2x} + C\end{aligned}$$

代入 (1) 式, 得

$$\begin{aligned}\iint_R f(x,y)dA &= \frac{1}{4}xe^{2x} - \frac{1}{8}e^{2x}\Big|_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{8}e^2\right) - \left(0 - \frac{1}{8}\right) \\ &= \frac{1}{8}(e^2 + 1)\end{aligned}$$

因此, 根據定義, f 在 R 上的平均值

$$A = \frac{\frac{1}{8}(e^2+1)}{e-1} = \frac{e^2+1}{8(e-1)}$$

例 4. 試求例 2 中的平均人口數.

<解> 因爲

$$R \text{ 的面積} = (20)(10) = 200$$

故根據定義及例 2 的結果,

$$\begin{aligned} \text{平均人口} &= \frac{1}{200}\iint_R f(x,y)\,dA \\ &= \frac{1}{200}(680,438) = 3402.19 \end{aligned}$$

Self-Check Exercises

設一海島沿岸城市區域 $R: -2 \le y \le 0, 0 \le x \le 4$ 且人口密度爲

$$f(x,y) = \frac{5000xe^y}{1+2x^2}$$

試求總人口數及平均人口數.

<解> 根據定義及取 $dydx$ 的次序積分且將 R 視爲垂直型平面區域, 並在對 x 積分時, 取

$$u = 1 + 2x^2,\ du = 4xdx$$

的代入法並調整係數, 得總人口數

$$\begin{aligned}
T &= \iint_R f(x,y)dA = \int_0^4 \int_{-2}^0 \frac{5000xe^y}{1+2x^2}dydx \\
&= \int_0^4 \left(\frac{5000x}{1+2x^2} e^y \Big|_{-2}^0 \right) dx \\
&= 5000(1-e^{-2}) \int_0^4 \frac{x}{1+2x^2}dx \\
&= \frac{5000}{4}(1-e^{-2}) \ln(1+2x^2)\Big|_0^4 \\
&= 1250(1-e^{-2}) \ln 33 \approx 3779
\end{aligned}$$

又 R 的面積爲 $(2)(4) = 8$, 得平均人口數

$$A = \frac{3779}{8} \approx 472$$

Exercises

14. 試求由上界曲面

$$f(x,y) = \frac{2y}{1+x^2}$$

與下界平面區域

$$R: y=\sqrt{x}, y=0, x=4$$

所圍出的實體體積.

<解> 根據定義, 並根據被積函數的型式, 取 $dydx$ 的次序積分, 且將 R 表成垂直型平面區域

$$R: 0 \le y \le \sqrt{x},\ 0 \le x \le 4$$

接著, 在對 y 積分後, 取

$$u=1+x^2,\ du=2xdx$$

的代入法對 x 積分, 並調整係數, 得實體體積

$$\begin{aligned} V &= \iint_R \frac{2y}{1+x^2}dA = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{2y}{1+x^2}dydx \\ &= \int_0^4 \left(\frac{1}{1+x^2} y^2 \Big|_0^{\sqrt{x}} \right) dx \\ &= \int_0^4 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^4 = \frac{1}{2}\ln 17 \end{aligned}$$

20. 試求 $f(x,y)=e^{-x^2}$ 在以 $(0,0)$, $(1,0)$ 與 $(1,1)$ 爲頂點的三角形 R 上的平均值.

<解> 根據被積函數 f 的型式, 需取 $dydx$ 的積分次序, 並根據圖示, 將 R 表成垂直型平面區域

$$R: 0 \leq y \leq x,\ 0 \leq x \leq 1$$

且在對 y 積分後, 根據代入法, 取

$$u = -x^2,\ du = -2xdx$$

並調整係數, 得

$$\begin{aligned} \iint_R e^{-x^2} dA &= \int_0^1 \int_0^x e^{-x^2} dydx \\ &= \int_0^1 \left(e^{-x^2} y \Big|_0^x \right) = \int_0^1 xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^1 \\ &= -\frac{1}{2}(e^{-1} - 1) = \frac{1}{2}(1 - e^{-1}) \end{aligned}$$

又 R 的面積爲 $\frac{1}{2}(1)(1) = \frac{1}{2}$. 因此, 平均值

$$A = \frac{\frac{1}{2}(1 - e^{-1})}{1/2} = 1 - e^{-1}$$

22. 設 R 爲 $y = 2x$ 與 $y = 0$ 由 $x = 1$ 至 $x = 3$ 所圍出的區域. 試求 $f(x, y) = \ln x$ 在 R 上的平均值.

<解> 由圖示, 將 R 表成垂直型平面區域

$$R: 0 \leq y \leq 2x,\ 1 \leq x \leq 3$$

且取對應的 $dydx$ 的積分次序, 並在對 y 積分後, 根據分部積分, 取

$$u = \ln x,\ dv = 2xdx$$

以及

$$du = \frac{1}{x}dx,\ v = x^2$$

對 x 積分, 得

$$\begin{aligned}\iint_R \ln x dA &= \int_1^3 \int_0^{2x} \ln x dy dx \\ &= \int_1^3 \left(\ln x \cdot y\Big|_0^{2x}\right) dx = \int_1^3 2x \ln x dx \\ &= \left(x^2 \ln x - \int x dx\right)\Big|_1^3 = x^2 \ln x - \frac{1}{2}x^2\Big|_1^3 \\ &= \left(9\ln 3 - \frac{9}{2}\right) - \left(0 - \frac{1}{2}\right) = 9\ln 3 - 4\end{aligned}$$

又 R 的面積爲 $\frac{1}{2}(2+6)(2) = 8$. 因此, 平均值

$$A = \frac{1}{8}(9\ln 3 - 4)$$

28. T

29. T