單元 53: 隨機變數的機率分布
(課本 §10.1)

實驗 (experiment): 一活動, 動作.

結果, 樣本點 (outcome, sample point): 實驗的觀察現象.

樣本空間 (sample space): 所有觀察結果的集合.

事件 (event): 樣本空間的一子集.

一事件發生的機率, 可能性 (probability, likelihood of an event): 在獨立相同的狀態下, 一事件發生的頻率.

如, 投擲一公正銅板 (實驗), 樣本空間爲 {H, T}, 事件

$$\{\mathsf{H}\},\quad \{\mathsf{T}\},\quad \{\mathsf{H},\mathsf{T}\},\quad \emptyset$$

的機率分別爲

$$P(\mathsf{H})=\frac{1}{2},\quad P(\mathsf{T})=\frac{1}{2}$$

與

$$P(\mathsf{H},\mathsf{T})=1,\quad P(\emptyset)=0$$

離散隨機變數 (discrete random variable)

$$X: \text{樣本空間} \to \{\text{可數值}\}$$

的函數, 其中

$$\{\text{可數值}\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \quad (\text{有限})$$

或

$$\{\text{可數值}\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \quad (\text{無限})$$

如, 離散隨機變數

$$X: \{\mathsf{H}, \mathsf{T}\} \to \{0, 1\}$$

滿足

$$X(\mathsf{H}) = 1, \quad X(\mathsf{T}) = 0$$

或離散隨機變數

$$Y: \{\text{朝上的點數}\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

滿足

$$Y(i \text{ 點朝上}) = i,\ i = 1, \ldots, 6$$

離散機率函數 (discrete probability function)

$$P: \{x_1, x_2 \ldots, x_n\} \to [0, 1]$$

的函數, 或

$$P : \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \to [0, 1]$$

的函數且滿足

1. $0 \le P(x_i) \le 1$, $1 \le i \le n$ (或 $i \ge 1$)

2. $P(x_1) + P(x_2) + \cdots + P(x_n) = 1$ (或 $\sum_{i=1}^{\infty} P(x_i) = 1$)

表示隨機變數值 x_i, $i = 1, \ldots, n$ (或 $i \ge 1$), 發生的可能性.

直方圖 (histogram): 如圖, 為隨機變數值與發生頻率的圖示.

連續隨機變數 (continuous random variable)

$$X : \text{樣本空間} \to [a, b] \text{ (或 } [a, \infty)\text{, 一區間)}$$

的函數. 如, 燈泡壽命

$$Y : \text{所有生產的燈泡} \to [0, \infty)$$

連續隨機變數 X 的機率密度函數 (probability density function, pdf): 在 X 的值域 I 上 (可爲有界或無界) 的非負函數 $f(x)$, 即 $f(x) \geq 0, x \in I$, 且滿足

$$\int_I f(x)dx = 1$$

即 f 在 I 上所圍出區域的面積爲 1, 如圖示. 用以表示連續隨機變數 X 在 $[a, b]$ 內的機率

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

即 f 在 $[a, b]$ 上所圍出區域的面積就是 X 在 $[a, b]$ 內的機率, 如圖示.

註. 對於連續隨機變數 X, 因爲

$$P(X = a) = P(a \leq X \leq a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

即在一點 $x = a$ 上所圍出區域的面積爲 0, 如圖示, 故對於連續隨機變數 X,

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(a < X \leq b) \\ &= P(a \leq X < b) = P(a < X < b) \end{aligned}$$

再次強調, 只在連續隨機變數時, 才成立.

例 1．試證

(a) $f(x)=\dfrac{2}{27}x(x-1),\ 1\le x\le 4$

(b) $f(x)=\dfrac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x},\ 0\le x<\infty$

均爲機率密度函數.

<解> (a) 明顯地，$f(x)\ge 0,\ x\in[1,4]$ 且

$$\begin{aligned}\int_1^4\frac{2}{27}x(x-1)dx&=\frac{2}{27}\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^4\\&=\frac{2}{27}\left[\left(\frac{64}{3}-8\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\right]\\&=\frac{2}{27}\left(13+\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{27}\frac{27}{2}=1\end{aligned}$$

故 f 是一 pdf.

(b) 因爲 $f(x)\ge 0,\ x\ge 0$ 且

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}dx=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{3}(-3)e^{-\frac{1}{3}x}\Big|_0^b\\&=(-1)\lim_{b\to\infty}(e^{-b/3}-1)=(-1)(0-1)=1\end{aligned}$$

故 f 爲一 pdf.

例 2. 試回答下列各項.

(a) 求 k 使得 $f(x) = kx^2,\ 0 \le x \le 5$ 爲一 pdf.

(b) 若 X 的 pdf 爲 f, 求 $P(1 < X < 2)$.

(c) 求 $P(X = 3)$.

<解> (a) 根據 pdf 的定義, k 需滿足

$$\int_0^5 kx^2 dx = 1$$

即

$$\frac{1}{3}kx^3\Big|_0^5 = \frac{k}{3}(125 - 0) = \frac{125}{3}k = 1$$

即 $k = \frac{3}{125}$.

(b) 根據定義,

$$\begin{aligned} P(1 < X < 2) &= \int_1^2 \frac{3}{125}x^2 dx = \frac{1}{125}x^3\Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{125}(8 - 1) = \frac{7}{125} \end{aligned}$$

(c) 根據定義,

$$\begin{aligned}P(X=3) &= \int_3^3 \frac{3}{125}x^2dx = \frac{1}{125}x^3\Big|_3^3 \\ &= \frac{1}{125}(27-27) = 0\end{aligned}$$

例 3. 設燈泡的壽命分布可由 pdf

$$f(x) = 0.001e^{-0.001x},\ 0 \le x < \infty$$

所描述. 試求

(a) 壽命小於或等於 500 小時的機率.

(b) 壽命超過 500 小時的機率.

(c) 壽命超過 1000 小時, 但小於 1500 小時的機率.

<解> (a) 設 X 爲燈泡的壽命並根據定義,

$$P(0 \le X \le 500) = \int_0^{500} 0.001e^{-0.001x}dx$$

$$\begin{aligned}&= 0.001\left(\frac{1}{-0.001}\right)e^{-0.001x}\Big|_0^{500} \\ &= -(e^{-0.5}-1) = 1-e^{-0.5} \approx 0.3935\end{aligned}$$

(b) 根據餘集的機率公式並由 (a),

$$\begin{aligned} P(X > 500) &= 1 - P(X \le 500) \\ &= 1 - (1 - e^{-0.5}) = e^{-0.5} \approx 0.6065 \end{aligned}$$

(C) 根據定義,

$$\begin{aligned} & P(1000 < X < 1500) \\ &= \int_{1000}^{1500} 0.001 e^{-0.001x} dx \\ &= -e^{-0.001x}\Big|_{1000}^{1500} = e^{-1} - e^{-1.5} \\ &\approx 0.1448 \end{aligned}$$

註. 型如

$$f(x) = ke^{-kx},\ 0 \le x < \infty$$

的機率密度函數稱作指數密度函數 (exponential density function), 常用於描述電子零件的壽命, 通話時間, 候診時間, 班機起降的間隔時間等隨機現象的不確定性.

聯合機率密度函數 (joint probability density function, joint pdf): 兩隨機變數 X 與 Y (如身高與體重, 或售價與里程數) 的聯合機率密度函數為一在有

序對函數 (X,Y) 的值域 D 上 (可爲有界或無界) 的非負函數 $f(x,y)$, 即 $f(x,y)\geq 0,(x,y)\in D$, 且滿足

$$\iint_D f(x,y)dA = 1$$

即 f 在 D 上所圍出實體的體積爲 1, 如圖示. 用以表示 (X,Y) 在 $R\subset D$ 內的機率

$$P[(X,Y)\in R] = \iint_R f(x,y)dA$$

即 f 在 R 上所圍出實體的體積就是 (X,Y) 在 R 內的機率, 如圖示.

例 4. 試證 $f(x,y)=xy$ 是一在

$$D=\{(x,y)|0\leq x\leq 1;\ 0\leq y\leq 2\}$$

上的聯合機率密度函數.

<解> 明顯地, $f(x,y)=xy\geq 0$, $(x,y)\in D$. 又

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)dA &= \int_0^2\int_0^1 xydxdy\\
&= \int_0^2\left(\frac{1}{2}x^2y\Big|_0^1\right)dy\\
&= \int_0^2\frac{1}{2}y(1^2-0)dy = \frac{1}{4}y^2\Big|_0^2\\
&= \frac{1}{4}(4-0)=1
\end{aligned}$$

故 $f(x,y)$ 是一在 D 上的 joint pdf.

例 5. 設

$$f(x,y)=xy,\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2$$

爲一 joint pdf. 試求

(a) $P(0\le X\le \frac{1}{2};\ 1\le Y\le 2)$

(b) $P(X+Y\le 1)$

<解> (a) 如圖示, 根據定義,

$$\begin{aligned} & P\left(0\le X\le \frac{1}{2};\ 1\le Y\le 2\right) \\ &= \int_1^2\int_0^{1/2} xydxdy=\int_1^2\left(\frac{1}{2}x^2y\Big|_0^{1/2}\right) \\ &= \int_1^2\frac{1}{8}ydy=\frac{1}{16}y^2\Big|_1^2=\frac{3}{16}\end{aligned}$$

(b) 如圖示, 根據定義,

$$\begin{aligned} P(X+Y\le 1) &= P[(X,Y)\in R] \\ &= \iint_R f(x,y)dA\end{aligned}$$

其中 R 為一垂直型平面區域

$$R: 0 \leq y \leq 1-x,\ 0 \leq x \leq 1$$

故將上式的二重積分表成次序為 $dydx$ 的逐次積分，得

$$\begin{aligned}
P(X+Y \leq 1) &= \int_0^1 \int_0^{1-x} xydydx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}xy^2 \Big|_0^{1-x} \right) dy = \int_0^1 \frac{1}{2}x(1-x)^2 dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x)dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{3-8+6}{12} \right) = \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

例 6. 設 $f(x,y) = 2e^{-x-2y}$ 為一在

$$D = \{(x,y) | x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

上的聯合機率密度函數.

(a) 試求 X 介於 0 與 1 且 Y 介於 1 與 2 間的機率.

(b) 試求 $X > 1$ 且 $Y < 2$ 的機率.

<解> (a) 如圖示, 根據定義,

$$
\begin{aligned}
&P(0 \le X \le 1, 1 \le Y \le 2) \\
&\quad = \int_0^1 \int_1^2 2e^{-x-2y}\,dy\,dx \\
&\quad = \int_0^2 \left[2e^{-x} \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-2y}\Big|_1^2 \right] dx \\
&\quad = \int_0^1 -e^{-x}(e^{-4} - e^{-2})\,dx \\
&\quad = (e^{-4} - e^{-2})(-1)(-1)e^{-x}\Big|_0^1 \\
&\quad = (e^{-4} - e^{-2})(e^{-1} - 1) \approx 0.0740
\end{aligned}
$$

(b) 根據圖示及定義,

$$
\begin{aligned}
P(X > 1, Y < 2) &= \int_1^\infty \int_0^2 2e^{-x-2y}\,dy\,dx \\
&= \int_1^\infty \left[-e^{-x} \left(e^{-2y}\Big|_0^2 \right) \right] dx \\
&= \int_1^\infty -e^{-x}(e^{-4} - 1)\,dx \\
&= (1 - e^{-4}) \lim_{b \to \infty} \int_1^b e^{-x}\,dx \\
&= (1 - e^{-4}) \lim_{b \to \infty} \left(-e^{-x}\Big|_1^b \right) \\
&= (1 - e^{-4}) \lim_{b \to \infty} (e^{-1} - e^{-b}) \\
&= (1 - e^{-4})e^{-1} \approx 0.3611
\end{aligned}
$$

Exercises

11. 試證

$$f(x)=\frac{x}{(x^2+1)^{3/2}},\ 0\le x<\infty$$

是一機率密度函數.

<解> 首先, 當 $0\le x<\infty$, 顯然地, $f\ge 0$. 接著, 根據瑕積分的定義以及取

$$u=x^2+1,\ du=2xdx$$

的代入法並調整係數, 得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}dx &= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\left.\frac{-2}{\sqrt{x^2+1}}\right|_0^b\right)\\ &= \frac{-2}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{b^2+1}}-1\right)\\ &= -1(0-1)=1\end{aligned}$$

因此, 根據定義, f 爲一機率密度函數.

12. 試證

$$f(x)=4xe^{-2x^2},\ 0\le x<\infty$$

是一機率密度函數.

<解> 明顯地, 當 $0 \leq x < \infty$, $f \geq 0$. 接著, 根據瑕積分的定義並取

$$u = -2x^2,\ du = -4xdx$$

的代入法以及調整係數, 得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty 4xe^{-2x^2}dx &= -\lim_{b\to\infty}\left(e^{-2x^2}\Big|_0^b\right)\\ &= -\lim_{b\to\infty}(e^{-2b^2}-1)\\ &= -(0-1)=1\end{aligned}$$

故根據定義, f 爲一機率密度函數.

20. 設函數

$$f(x) = ke^{-x/2},\ 0 \leq x < \infty$$

試求 k 使得 f 爲一機率密度函數.

<解> 根據機率密度函數的定義, k 需滿足

$$\int_0^\infty ke^{-x/2}dx = 1$$

即根據瑕積分的定義及積分的線性轉換,

$$\begin{aligned}\lim_{b\to\infty}\left(-2ke^{-x/2}\Big|_0^b\right) &= -2k\lim_{b\to\infty}(e^{-b/2}-1)\\ &= -2k(0-1)=2k=1\end{aligned}$$

故 $k = \frac{1}{2}$.

28. 設隨機變 X 的機率密度函數爲

$$f(x) = \frac{1}{9}xe^{-x/3},\ 0 \le x < \infty$$

試求 (a) $P(0 \le X \le 3)$ 與 (b) $P(X \ge 1)$.

<解> (a) 根據機率的定義以及取

$$u = \frac{1}{9}x,\ dv = e^{-x/3}dx$$

與

$$du = \frac{1}{9}dx,\ v = -3e^{-x/3}$$

的分部積分, 得

$$\begin{aligned}
P(0 \le X \le 3) &= \int_0^3 \frac{1}{9}xe^{-x/3}dx \\
&= -\frac{1}{3}xe^{-x/3}\Big|_0^3 + \frac{1}{3}\int_0^3 e^{-x/3}dx \\
&= -\frac{1}{3}xe^{-x/3} - e^{-x/3}\Big|_0^3 \\
&= -e^{-x/3}\left(\frac{1}{3}x + 1\right)\Big|_0^3 \\
&= -e^{-1}(2) - (-1) = 1 - \frac{2}{e}
\end{aligned}$$

(b) 根據機率與瑕積分的定義以及 (a) 中求得的不定積分, 得

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 1) &= \int_1^\infty \frac{1}{9} x e^{-x/3} dx \\
&= \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{1}{9} x e^{-x/3} dx \\
&= \lim_{b \to \infty} \left[-e^{-x/3} \left(\frac{1}{3} x + 1 \right) \Big|_1^b \right] \\
&= \lim_{b \to \infty} \left[\frac{4}{3} e^{-1/3} - e^{-b/3} \left(\frac{1}{3} b + 1 \right) \right] \\
&= \frac{4}{3} e^{-1/3} - \lim_{b \to \infty} \frac{\frac{1}{3} b + 1}{e^{b/3}} \\
&= \frac{4}{3} e^{-1/3} - 0 = \frac{4}{3} e^{-1/3}
\end{aligned}
$$

其中倒數第二式的 0, 乃因分母的指數函數 $e^{b/3}$ 趨近於 ∞ 的速度遠快於分子的多項式 $\frac{1}{3}b + 1$, 即 當 $b \to \infty$,

$$e^{b/3} \gg \frac{1}{3} b + 1$$

29. 設隨機變數 X 的機率密度函數爲

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

試求 (a) $P(\frac{1}{2} \leq X \leq 1)$, (b) $P(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2})$ 以及 (c) $P(X \geq 1)$, 與 (d) $P(X \leq \frac{3}{2})$.

<解> (a) 根據機率的定義以及機率密度函數 f 所對應的數學式，得

$$
\begin{aligned}
P\left(\frac{1}{2} \le X \le 1\right) &= \int_{1/2}^{1} (1-x)\,dx = x - \frac{1}{2}x^2 \Big|_{1/2}^{1} \\
&= \left(1-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

(b) 根據機率的性質及 (a) 的結果與機率的定義，

$$
\begin{aligned}
&P\left(\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{2}\right) \\
&= P\left(\frac{1}{2} \le X \le 1\right) + P\left(1 \le X \le \frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{1}{8} + \int_{1}^{3/2} (x-1)\,dx = \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{2}x^2 - x \Big|_{1}^{3/2}\right) \\
&= \frac{1}{8} + \left[\left(\frac{9}{8} - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] \\
&= \frac{1}{8} + \left(-\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

(c) 由機率公式與機率密度函數的定義，

$$
\begin{aligned}
P(X \ge 1) &= \int_{1}^{2} (x-1)\,dx = \frac{1}{2}x^2 - x \Big|_{1}^{2} \\
&= (2-2) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

(d) 根據機率的性質及 (b) 的結果與機率公式, 得

$$
\begin{aligned}
P\left(X \le \frac{3}{2}\right) &= P(0 \le X \le 1) + P\left(1 \le X \le \frac{3}{2}\right) \\
&= \int_0^1 (1-x)dx + \frac{1}{8} = \left(x - \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1\right) + \frac{1}{8} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}
\end{aligned}
$$

37. 試求 k 使得

$$f(x,y) = k(x-x^2)e^{-2y}$$

為一在

$$D = \{(x,y)|0 \le x \le 1, 1 \le y < \infty\}$$

上的聯合機率密度函數.

<解> 根據機率密度函數的定義, k 需滿足

$$\iint_D k(x-x^2)e^{-2y}dA = 1$$

接著, 視 D 為水平型平面區域並表成對應的 $dxdy$ 逐次積分, 得

$$\int_1^\infty \int_0^1 k(x-x^2)e^{-2y}dxdy = 1$$

即

$$
\begin{aligned}
& k\int_1^{\infty} e^{-2y}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1\right)dy \\
&= k\int_1^{\infty} e^{-2y}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-0\right]dy=\frac{k}{6}\int_1^{\infty}e^{-2y}dy \\
&= 1
\end{aligned}
$$

最後，根據瑕積分的定義與積分的線性轉換，由上式得

$$
\begin{aligned}
\frac{k}{6}\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-2y}\Big|_1^b\right) &= -\frac{k}{12}\lim_{b\to\infty}(e^{-2b}-e^{-2}) \\
&= -\frac{k}{12}(0-e^{-2})=\frac{k}{12e^2} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

故 $k=12e^2$.

38. 試求 k 使得

$$f(x,y)=kxye^{-(x^2+y^2)}$$

為一在

$$D=\{(x,y)|0<x<\infty,0<y<\infty\}$$

上的聯合機率密度函數.

<解> 根據機率密度函數的定義，k 需滿足

$$\iint_D kxye^{-(x^2+y^2)}dA=1$$

接著, 視 D 爲水平型平面區域並表成對應的 $dxdy$ 逐次積分, 且根據指數律, 瑕積分的定義以及取

$$u = -x^2,\ du = -2xdx$$

的代入法並調整係數, 得

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty kxye^{-(x^2+y^2)}dxdy \\
&= \int_0^\infty kye^{-y^2} \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^b\right)dy \\
&= \int_0^\infty -\frac{1}{2}kye^{-y^2}\lim_{b\to\infty}(e^{-b^2}-1)dy \\
&= \int_0^\infty -\frac{k}{2}ye^{-y^2}(0-1)dy = \int_0^\infty \frac{k}{2}ye^{-y^2}dy = 1
\end{aligned}$$

最後, 再根據瑕積分的定義與取

$$u = -y^2,\ du = -2ydy$$

的代入法並調整係數, 由上式得

$$\begin{aligned}
\frac{k}{2}\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-y^2}\Big|_0^b\right) &= -\frac{k}{4}\lim_{b\to\infty}(e^{-b^2}-1) \\
&= -\frac{k}{4}(0-1) = \frac{k}{4} = 1
\end{aligned}$$

故 $k = 4$.

41. 設隨機變數 X 與 Y 在區域

$$D = \{(x,y)|1 \le x \le 4;\ 0 \le y \le 4\}$$

上的聯合機率密度函數爲

$$f(x,y)=\frac{9}{\sqrt{224}}\sqrt{xy}$$

試求

(a) $P(1\le X\le 2;\ 0\le Y\le 1)$

(b) $P(1\le X\le 4;\ 0\le Y\le \sqrt{X})$

<解> (a) 根據雙隨機變數的機率定義及逐次積分，

$$\begin{aligned}
&P(1\le X\le 2;\ 0\le Y\le 1)\\
=&\int_0^1\int_1^2\frac{9}{224}\sqrt{xy}\,dxdy\\
=&\int_0^1\frac{9}{224}\sqrt{y}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_1^2\right)dy\\
=&\int_0^1\frac{9}{224}\sqrt{y}\cdot\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)dy\\
=&\frac{3}{112}(2\sqrt{2}-1)\left(\frac{2}{3}y^{3/2}\Big|_0^1\right)=\frac{1}{56}(2\sqrt{2}-1)
\end{aligned}$$

(b) 如圖示，根據定義，

$$P(1\le X\le 4;\ 0\le Y\le \sqrt{X})=\iint_R f(x,y)dA$$

其中 R 爲一垂直型平面區域

$$R: 0 \le y \le \sqrt{x},\ 1 \le x \le 4$$

故將上式的二重積分表成次序爲 $dydx$ 的逐次積分, 得

$$\begin{aligned}
&P(1 \le X \le 4;\ 0 \le Y \le \sqrt{X}) \\
&= \int_1^4 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{9}{224}\sqrt{xy}\,dydx \\
&= \int_1^4 \frac{9}{224}\sqrt{x}\left(\frac{2}{3}y^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{x}}\right)dx \\
&= \int_1^4 \frac{3}{112}x^{1/2}[(x^{1/2})^{3/2} - 0]dx \\
&= \int_1^4 \frac{3}{112}x^{1/2}x^{3/4}dx = \int_1^4 \frac{3}{112}x^{5/4}dx \\
&= \frac{3}{112}\left(\frac{4}{9}x^{9/4}\Big|_1^4\right) = \frac{1}{84}[(2^2)^{9/4} - 1] \\
&= \frac{1}{84}(2^{9/2} - 1) = \frac{1}{84}(16\sqrt{2} - 1) \approx 0.2575
\end{aligned}$$

42. 設隨機變數 X 與 Y 在區域

$$D = \{(x, y) | 0 < x \le 1;\ 0 \le y < \infty\}$$

上的機率密度函數爲

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-2y}$$

試求

(a) $P(0 < X \leq 1;\ 2 \leq Y < \infty)$

(b) $P\left(0 < X \leq \frac{1}{2};\ 0 \leq Y < \infty\right)$

<解> (a) 根據雙隨機變數的機率定義以及逐次積分和瑕積分的定義,

$$\begin{aligned} & P(0 < X \leq 1;\ 2 \leq Y < \infty) \\ = \ & \int_2^\infty \int_0^1 \frac{e^{-2y}}{\sqrt{x}} dxdy = \int_2^\infty e^{-2y} \left(2\sqrt{x}\Big|_0^1 \right) dy \\ = \ & \lim_{b\to\infty} \int_2^b 2e^{-2y} dy = \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-2y}\Big|_2^b \right) \\ = \ & -\lim_{b\to\infty} (e^{-2b} - e^{-4}) = e^{-4} \approx 0.0183 \end{aligned}$$

(b) 同理,

$$\begin{aligned} & P(0 < X \leq 1/2;\ 0 \leq Y < \infty) \\ = \ & \int_0^\infty \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-2y}}{\sqrt{x}} dxdy = \int_0^\infty e^{-2y} \left(2\sqrt{x}\Big|_0^{1/2} \right) dy \\ = \ & \lim_{b\to\infty} \int_0^b \sqrt{2} e^{-2y} dy = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-2y}\Big|_0^b \right) \\ = \ & -\frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{b\to\infty} (e^{-2b} - 1) = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071 \end{aligned}$$

53. 設某一有線電視預估明年在 A 區的新客戶數 X (單位: 千戶) 與 B 區的新客戶數 Y (單位: 千戶) 在

$$D = \{(x, y) | 0 \le x \le 5;\ 0 \le y \le 4\}$$

上的機率密度函數爲

$$f(x, y) = \frac{9}{4000} xy\sqrt{25 - x^2}(4 - y)$$

試求明年 A 區的新客戶數介於 2000 與 2500 以及 B 區的新客戶數介於 1000 與 2000 的機率.

<解> 由題意, 並根據取

$$u = 25 - x^2, \quad du = -2xdx$$

的代入法, 所求爲

$$\begin{aligned}
&P(2 \le X \le 2.5;\ 1 \le Y \le 2) \\
&= \int_2^{2.5} \int_1^2 \frac{9}{4000} xy\sqrt{25 - x^2}(4 - y)dydx \\
&= \frac{9}{4000} \int_2^{2.5} x\sqrt{25 - x^2} \left(2y^2 - \frac{1}{3}y^3 \Big|_1^2 \right) dx \\
&= \frac{9}{4000} \left(\frac{11}{3} \right) \int_2^{2.5} x\sqrt{25 - x^2} dx \\
&= \frac{33}{4000} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{2}{3} \right) (25 - x^2)^{3/2} \Big|_2^{2.5} \\
&= -\frac{11}{4000} \left[(25 - (2.5)^2)^{3/2} - (21)^{3/2} \right] \\
&= \frac{11}{4000} [(21)^{3/2} - (18.75)^{3/2}] \approx 0.0413716
\end{aligned}$$

55. F, 需 $f(x) \geq 0$.

56. F, 可能

$$\int_c^d f(x)dx < \int_a^b f(x)dx = 1$$