

單元 63: 三角函數的微分

(課本 §12.3)

首先探討兩個極限公式,

$$1. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

為何成立? 由圖示, 當 x 靠近 0 時,

$$x \approx \sin x$$

故比值的極限

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

得證.

$$2. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

為何成立? 將分子, 分母同乘

$$\cos h + 1$$

並根據平方差公式

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

及三角恆等式

$$\sin^2 h + \cos^2 h = 1$$

化簡且根據第一個極限公式, 得

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} \\ &= -\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}\right) \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{\cos h + 1}\right) \\ &= (-1)(1) \left(\frac{0}{1+1}\right) = 0\end{aligned}$$

得證.

接著, 由導函數的定義及上述兩個極限公式, 得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sin x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\ &= \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= (\sin x)(0) + (\cos x)(1) = \cos x\end{aligned}$$

其中第二個等號成立乃根據和角公式

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

所致.

又由連鎖規則, 若 f 可微, 得

$$\frac{d}{dx}[\sin f(x)] = [\cos f(x)]f'(x)$$

例 1. 試求下列各函數的導函數.

(a) $f(x) = x^2 \sin x$

(b) $g(x) = \sin(2x + 1)$

(c) $h(x) = (x + \sin x^2)^{10}$

<解> (a) 根據正弦函數的微分公式及乘法規則, 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \sin x + x^2 \cos x \\ &= x(2 \sin x + x \cos x) \end{aligned}$$

(b) 根據正弦函數的微分公式及連鎖規則,

$$\begin{aligned}g'(x) &= \cos(2x + 1) \cdot (2x + 1)' \\ &= 2 \cos(2x + 1)\end{aligned}$$

(c) 根據連鎖規則及正弦函數的微分公式,

$$\begin{aligned}h'(x) &= 10(x + \sin x^2)^9 (1 + \cos x^2 \cdot (2x)) \\ &= 10(x + \sin x^2)^9 (1 + 2x \cos x^2)\end{aligned}$$

此外, 由正弦與餘弦函數的關係式

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{與} \quad \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

以及正弦函數的微分公式與連鎖規則, 得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\cos x) &= \frac{d}{dx} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' \\ &= (\sin x)(-1) = -\sin x\end{aligned}$$

並由連鎖規則, 若 f 為可微, 得

$$\frac{d}{dx}[\cos f(x)] = -[\sin f(x)]f'(x)$$

例 2. 試微分下列各函數.

$$(a) f(x) = \cos(2x^2 - 1)$$

$$(b) g(x) = \sqrt{\cos 2x}$$

$$(c) h(x) = e^{\sin 2x + \cos 3x}$$

<解> (a) 根據餘弦函數的微分公式及連鎖規則,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin(2x^2 - 1) \cdot (2x^2 - 1)' \\ &= -4x \sin(2x^2 - 1) \end{aligned}$$

(b) 根據連鎖規則及餘弦函數的微分公式,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2}(\cos 2x)^{-1/2}(-\sin 2x)(2) \\ &= -\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}} \end{aligned}$$

(c) 根據連鎖規則以及指數函數, 正弦函數, 餘弦函數的微分公式,

$$\begin{aligned} h'(x) &= e^{\sin 2x + \cos 3x} [\cos 2x(2) - \sin 3x(3)] \\ &= (2 \cos 2x - 3 \sin 3x) e^{\sin 2x + \cos 3x} \end{aligned}$$

最後, 根據除法規則或連鎖規則可推導另外四個三角函數的導函數.

$$1. \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$2. \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

$$3. \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$4. \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

<證> 1. 根據除法規則以及正弦函數, 餘弦函數的微分公式,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\tan x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) \\ &= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \sec^2 x \end{aligned}$$

2. 根據除法規則以及正弦函數, 餘弦函數的微分公式,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\cot x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) \\ &= \frac{(-\sin x)(\sin x) - \cos x(\cos x)}{\sin^2 x} \\ &= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} \\ &= -\csc^2 x\end{aligned}$$

3. 根據連鎖規則以及餘弦函數的微分公式,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sec x) &= \frac{d}{dx}[(\cos x)^{-1}] \\ &= -(\cos x)^{-2} \cdot (-\sin x) \\ &= \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \sec x \tan x\end{aligned}$$

4. 根據連鎖規則以及正弦函數的微分公式,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\csc x) &= \frac{d}{dx}[(\sin x)^{-1}] \\ &= -(\sin x)^{-2} \cdot \cos x \\ &= -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \\ &= -\csc x \cot x\end{aligned}$$

再根據連鎖規則, 若 f 可微, 則

$$1'. \quad \frac{d}{dx}[\tan f(x)] = [\sec^2 f(x)]f'(x)$$

$$2'. \quad \frac{d}{dx}[\cot f(x)] = -[\csc^2 f(x)]f'(x)$$

$$3'. \quad \frac{d}{dx}[\sec f(x)] = [\sec f(x) \tan f(x)]f'(x)$$

$$4'. \quad \frac{d}{dx}[\csc f(x)] = -[\csc f(x) \cot f(x)]f'(x)$$

例 3. 試求函數 $f(x) = \tan 2x$ 的圖形上過點 $(\frac{\pi}{8}, 1)$ 的切線方程式.

<解> 首先, 根據正切函數的微分公式與連鎖規則,

$$f'(x) = \sec^2(2x)(2) = 2\sec^2(2x)$$

得斜率

$$f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2(\sqrt{2})^2 = 4$$

因此, 切線爲

$$y - 1 = 4 \left(x - \frac{\pi}{8} \right)$$

即

$$y = 4x + \left(1 - \frac{\pi}{2} \right)$$

例 4. 設在 t 月, 貓頭鷹 (predator, 掠食者) 的數量爲

$$P_1(t) = 1000 + 100 \sin \left(\frac{\pi t}{12} \right)$$

且老鼠 (prey, 獵物) 的數量爲

$$P_2(t) = 20,000 + 4000 \cos \left(\frac{\pi t}{12} \right)$$

試求 $t = 2$ 的各族群變化率.

<解> 首先, 根據正弦函數, 餘弦函數的微分公式及連鎖規則,

$$P_1'(t) = 100 \left[\cos \left(\frac{\pi t}{12} \right) \right] \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{25\pi}{3} \cos \left(\frac{\pi t}{12} \right)$$

且

$$\begin{aligned} P_2'(t) &= 4000 \left[-\sin \left(\frac{\pi t}{12} \right) \right] \left(\frac{\pi}{12} \right) \\ &= -\frac{1000\pi}{3} \sin \left(\frac{\pi t}{12} \right) \end{aligned}$$

代 $t = 2$, 得

$$P_1'(2) = \frac{25\pi}{3} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{25\pi}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 22.7$$

即在 2 月時, 每月約增 22.7 隻, 以及

$$P_2'(2) = -\frac{1000\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1000\pi}{3} \left(\frac{1}{2}\right) \\ \approx -523.6$$

即在 2 月時, 每月約少 523.6 隻.

例 5. 試繪

$$f(x) = \sin^2 x, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

的圖形.

<解> (a) 根據連鎖規則與正弦函數的微分公式, 由

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x = 0$$

得

$$2x = 0, \pi, 2\pi$$

即臨界數 $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ 與 $x = \pi$. 接著, 求 f' 在各子區間的符號, 得

$(0, \frac{\pi}{2})$: $f' = (+)$, 遞增

$(\frac{\pi}{2}, \pi)$: $f' = (-)$, 遞減

如圖示. 因此, f 在子區間 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上遞增且在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上遞減.

(b) 由圖知, 得絕對最大值

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

又

$$f(0) = 0, \quad f(\pi) = \sin^2 \pi = 0$$

得絕對最小值 0.

(c) 根據連鎖規則與正弦函數的微分公式, 由二次導函數

$$f''(x) = 2 \cos 2x = 0$$

得

$$2x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

即反曲後選數 $x = \frac{\pi}{4}$ 與 $x = \frac{3\pi}{4}$. 接著, 求 f'' 在各子區間的符號, 得

$(0, \frac{\pi}{4})$: $f'' = (+)$, 上凹

$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right): f'' = (-)$, 下凹

$\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right): f'' = (+)$: 上凹

如圖示. 因此, f 在子區間 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 與 $\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ 上凹且在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ 下凹並得二反曲點

$$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right) \text{ 與 } \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

(d) 描點與連結. 標示絕對極值與反曲點並將 f' 與 f'' 的符號圖分別置於 x -軸的上, 下方且由左至右, 在每個子區間上, 根據單調性及凹性以平滑曲線連結, 得

$\left(0, \frac{\pi}{4}\right): f' = (+), f'' = (+)$, 遞增, 上凹

$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right): f' = (+), f'' = (-)$, 遞增, 下凹

$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right): f' = (-), f'' = (-)$, 遞減, 下凹

$\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right): f' = (-), f'' = (+)$, 遞減, 上凹

如圖示.

例 6. 設某餐廳由 6 月開始的第 t 週的收益為

$$R(t) = 2 \left(5 - 4 \cos \frac{\pi}{6} t \right), \quad 0 \leq t \leq 12$$

試問何時收益增加最快?

<解> 收益增加率為

$$R'(t) = -8 \left(-\sin \frac{\pi}{6} t \right) \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{4\pi}{3} \sin \frac{\pi t}{6}$$

由題意, 需最大化 $R'(t)$. 由

$$R''(t) = \frac{4\pi}{3} \left(\cos \frac{\pi t}{6} \right) \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{2\pi^2}{9} \cos \frac{\pi t}{6} = 0$$

得

$$\frac{\pi t}{6} = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}$$

即 $R'(t)$ 的臨界數為 $t = 3$ 與 $t = 9$. 又 $R'(t)$ 在 $[0, 12]$ 上連續, 故絕對極值發生在臨界數或端點上, 經由計算, 得

$$R'(0) = 0, \quad R'(3) = \frac{4\pi}{3}$$

$$R'(9) = -\frac{4\pi}{3}, \quad R'(12) = 0$$

比較, 得 $R'(t)$ 的最大值為 $\frac{4\pi}{3}$ 且發生在 6 月開始的第 3 週.

例 7. 今製造一橫截面為下底是 1 呎的梯形且側面為 6 呎長, 1 呎寬的矩形馬槽 (trough), 如圖示. 試求最大容量的仰角 θ .

<解> 因為

$$\text{體積} = \text{橫截面積} \times 6$$

故最大化體積等價於最大化橫截面積

$$\begin{aligned} A(\theta) &= \frac{1}{2}[1 + (1 + 2 \cos \theta)] \sin \theta \\ &= (1 + \cos \theta) \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

其中第一個等號乃根據圖示, 1 為下底, $1 + 2 \cos \theta$ 為上底以及梯形面積公式所致. 由

$$\begin{aligned} A'(\theta) &= -\sin^2 \theta + (1 + \cos \theta) \cos \theta \\ &= -(1 - \cos^2 \theta) + \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1 \\ &= (2 \cos \theta - 1)(\cos \theta + 1) = 0 \end{aligned}$$

得

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \text{ 或 } \cos \theta = -1$$

即臨界數 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 或 $\theta = \pi$ (不合, 因為大於 $\frac{\pi}{2}$). 又計算 $A'(\theta)$ 在各子區間的符號, 得

$(0, \frac{\pi}{3})$: $A'(\theta) = (+)(+) = (+)$, 遞增

$(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$: $A'(\theta) = (-)(+) = (-)$, 遞減

如圖示. 故當 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 時, 體積最大. 或計算 A 在臨界數與端點的值, 得

$$A(0) = (1 + 1)(0) = 0$$

$$A\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$A\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1 + 0)(1) = 1$$

經由比較, 當 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 時有最大橫截面積, 即體積最大.

Exercises

8. 給定

$$f(x) = \cot \sqrt{x}$$

根據連鎖規則及餘切函數的微分公式, 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\csc^2 \sqrt{x} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{x}} \csc^2 \sqrt{x} \end{aligned}$$

19. 給定函數

$$f(x) = x \cos \frac{1}{x}$$

根據乘法規則, 連鎖規則及餘弦函數的微分公式, 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos \frac{1}{x} + x \left(-\sin \frac{1}{x} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ &= \cos \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \end{aligned}$$

21. 給定函數

$$f(x) = \frac{x - \sin x}{1 + \cos x}$$

根據除法規則及正弦, 餘弦函數的微分公式, 得導函數的分子為

$$\begin{aligned} &(1 - \cos x)(1 + \cos x) \\ &\quad - (x - \sin x)(-\sin x) \\ &= 1 - \cos^2 x + x \sin x - \sin^2 x = x \sin x \end{aligned}$$

故

$$f'(x) = \frac{x \sin x}{(1 + \cos x)^2}$$

15. 給定

$$f(x) = \sin \sqrt{x^2 - 1}$$

根據連鎖規則及正弦函數的微分公式, 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos \sqrt{x^2 - 1} \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} \right) \\ &= \frac{x \cos \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$

17. 給定函數

$$f(x) = e^x \csc x$$

根據乘法規則及指數與餘割函數的微分公式, 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \csc x + e^x (-\csc x \cot x) \\ &= e^x \csc x (1 - \cot x) \end{aligned}$$

48. 試求當距離為 13,000 呎, 且以 480 呎/秒 增加時, ϕ 的變化速度.

<解> 求 z 與 ϕ 的關係式, 得

$$\frac{12,000}{z} = \cos \phi$$

其中 z 與 ϕ 均隨時間 t 而變. 故以連鎖規則對 t 微分, 得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{12,000}{z} \right) = \frac{d}{dt} \cos \phi$$

即

$$\frac{-12,000 dz}{z^2} \frac{d\phi}{dt} = -\sin \phi \frac{d\phi}{dt}$$

得

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{12,000 dz}{z^2 \sin \phi dt}$$

由題意, 代 $z = 13,000$, $\frac{dz}{dt} = 480$ 以及對應的

$$\begin{aligned} \sin \phi &= \frac{y}{z} = \frac{\sqrt{(13000)^2 - (12000)^2}}{13000} \\ &= \frac{5000}{13000} = \frac{5}{13} \end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \frac{12000}{(13000)^2 \left(\frac{5}{13}\right)} (480) \\ &= \frac{12(480)}{(13000)(5)} = \frac{(12)(96)}{13000} = \frac{144}{1625} \end{aligned}$$

57. T, 因為

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \right) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

58. T, 因爲

$$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0, \quad -\infty < x < \infty$$

故 f 非遞減.

59. F, 反例, $f(x) = \cos x$ 在 $x = \pi$ 有相對極小值

$$f(\pi) = \cos \pi = -1$$

但 $g(x) = \sin x$ 在 $x = \pi$ 爲

$$g(\pi) = \sin \pi = 0$$

不是相對極大值.

60. T, 由

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

得

$$f'(x) = \cos x - \sin x$$

以及

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\sin x - \cos x \\ &= -(\sin x + \cos x) < 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

故 f 在區間 $(0, \frac{\pi}{2})$ 下凹.

51.

52.