

單元 4: 直線

(課本 §1.4)

一. 直線的斜率 (slope of a line)

定義. 設 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 爲一非鉛垂線 (nonvertical line) L 上的相異二點, 則 L 的斜率 (slope)

$$m \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

其中 Δy 稱作 y 的變化量 (change in y), Δx 稱作 x 的變化量 (change in x), 如圖示.

註. 不定義鉛垂線 (vertical line) 的斜率, 如 $x = 6$, $x = -3$ 的斜率均未定義, 因爲鉛垂線的 x 坐標爲一固定值, x 的改變量 (change in x) Δx 恆爲 0, 不適宜出現在斜率定義中的分母, 如圖示.

平行線 (parallel lines)

二相異直線 L_1 與 L_2 互爲平行若且唯若它們的斜率相同或斜率均未定義, 記爲 $L_1 \parallel L_2$, 如圖示.

垂直線 (perpendicular lines)

設二相異非鉛垂線 L_1 與 L_2 的斜率分別為 m_1 與 m_2 , 則 L_1 與 L_2 相互垂直若且唯若

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad (\text{或 } m_1 m_2 = -1)$$

即斜率互為負 (顛) 倒數 (negative reciprocal), 並記為 $L_1 \perp L_2$, 如圖示.

註. 鉛垂線 (未定義斜率) 與水平線 (斜率為 0) 互為垂直.

二. 直線方程式

常用的直線方程式

1. 鉛垂線: $x = a$

2. 水平線: $y = b$

3. 點斜式 (point-slope form): 過點 (x_1, y_1) 且斜率為 m 的直線方程式為

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

4. 斜截式 (slope-intercept): 斜率為 m 且 y -截距 (y -intercept) 為 b 的直線方程式為

$$y = mx + b$$

註. y -截距乃直線與 y -軸交點的 y 坐標, 如交點為 $(0, b)$, 則 y -截距為 b . 同理, 若直線與 x -軸的交點為 $(a, 0)$, 則稱 a 為 x -截距 (x -intercept).

5. 一般式 (general form): 平面上的直線方程式為

$$Ax + By + C = 0$$

其中 A, B 不全為 0.