單元 12: 乘法規則與除法規則
(課本 §3.2)

本單元再探討二個微分規則: 乘法規則與除法規則.

規則 5 (乘法規則, product rule). 設 f 與 g 爲二可微函數, 則

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

簡記爲

$$(fg)' = fg' + gf'$$

即二函數乘積的導函數等於第一個函數乘以第二個函數的導函數加上第二個函數乘以第一個函數的導函數.

註 1. 根據乘法與加法的交換律, 不同型式的乘法規則爲

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$$

或

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

或其它.

註 2. 乘法規則可推廣至任意有限個函數的乘積, 如三個函數乘積的乘法規則爲

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$$

或四個函數乘積的乘法規則

$$(fghk)' = f'ghk + fg'hk + fgh'k + fghk'$$

註 3. 乘積的導函數不等於導函數的乘積, 即

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] \neq f'(x)g'(x)$$

也就是說, 不可逐項微分; 只有和差才可逐項微分.

例 1. 試求下列各項函數的導函數.

(a) $f(x) = (4x^2 + 1)(4\sqrt{x} - 2)$

(b) $g(x) = (x^2 - 3x + 2)\left(\frac{x^2 - 2}{x}\right)$

(c) $h(x) = x^5\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1\right)$

<解> (a) 根據乘法規則,

$$f'(x) = \frac{40x^2 - 16x^{3/2} + 2}{\sqrt{x}}$$

(b) 根據乘法規則,

$$g'(x) = \frac{3x^4 - 6x^3 + 4}{x^2}$$

(c) 經由展開並逐項微分, 得

$$h'(x) = \frac{9}{2}x^{7/2} + 5x^4$$

或直接使用乘法規則, 但過程較冗長.

註. (a), (b) 小題說明, 需要的話, 要將各項改寫成 cx^n 的型式, 再微分; (c) 小題說明, 若可能的話, 可避開直接使用較繁瑣的乘法規則過程.

規則 6 (除法規則, quotient rule). 設 f 與 g 爲二可微函數且 $g(x) \neq 0$, 則

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

簡記爲

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

即二函數相除的導函數等於分母平方分之分母乘以分子的導函數減去分子乘以分母的導函數.

註 1. 根據乘法交換律, 不同型式的除法規則爲

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}$$

或

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

或其它; 因爲減法沒有交換律, 分子部分不能交換, 即

$$\left(\frac{f}{g}\right)' \neq \frac{fg' - f'g}{g^2}$$

註 2. 相除的導函數不等於導函數的相除, 即

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] \neq \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

也就是說, 不可逐項微分; 只有和差才可逐項微分.

例 2. 試求下列各項函數的導函數.

(a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4} - \dfrac{x-1}{x^2+4}$

(b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{x^2+1}$

(c) $h(x) = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}}$

<解> (a) 根據除法規則,

$$f'(x) = \frac{x^2-2x-4}{(x^2+4)^2} - \frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}$$

(b) 根據除法規則,

$$g'(x) = \frac{-3x^2-4x^{3/2}+1}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2}$$

(c) 根據除法分配律改寫並逐項微分, 得

$$h'(x) = \frac{3x^2-1}{2x^{3/2}}$$

或直接使用除法規則, 但過程較冗長.

註. 需要或可能的話, 將各項改寫成 cx^n 的型式並避開直接使用繁瑣的除法規則過程.

例 3. 設某熱門電影自發行日 t 年後的銷售額為

$$S(t) = \frac{5t}{t^2+1} \quad (\text{百萬元}),\ t \geq 0$$

(a) 試求 t 年後的銷售額變化率.

(b) 試問剛發行時 $(t=0)$ 以及 2 年後的銷售額變化速度分別為何?

<解> (a) 由導函數的變化率涵義及除法規則,

$$\text{變化率} = S'(t) = \frac{5(1-t^2)}{(t^2+1)^2}$$

(b) 代入 $t=0$, 得

$$S'(0) = \frac{5(1-0)}{(0+1)^2} = 5$$

表示銷售額以每年 \$5,000,000 的速率成長.

代入 $t = 2$, 得

$$S'(2) = \frac{5(1-4)}{(4+1)^2} = -\frac{3}{5} = -0.6$$

表示銷售額以每年 \$600,000 的速率衰退.

例 4. 有機廢棄物 (organic waste) 倒入池塘後, 由於氧化作用會降低池塘內的含氧量. 隨著時間, 大自然會使池塘內的含氧量回復到它的天然水準. 設傾倒 t 天後, 池中含氧量與天然水準的百分比爲

$$f(t) = 100\left[\frac{t^2+10t+100}{t^2+20t+100}\right] \quad (0 < t < \infty)$$

(a) 試求傾倒有機廢棄物 t 天後, 含氧量百分比的變化率.

(b) 試問傾倒有機廢棄物 1 天, 10 天及 20 天後, 含氧量百分比如何變化?

<解> (a) 根據導函數的變化率涵義以及除法規則, 變化率爲

$$f'(t) = \frac{1000(t^2-100)}{(t^2+20t+100)^2}$$

(b) 代入 $t=1$, 得

$$f'(1)=\frac{-99,000}{(121)^2}\approx -6.76$$

表示含氧量以每天約 6.8% 的速率下降.

代入 $t=10$, 得

$$f'(10)=\frac{1000(100-100)}{(400)^2}=0$$

表示含氧量不增也不減.

代入 $t=20$, 得

$$f'(20)=\frac{1000(400-100)}{(900)^2}\approx 0.37$$

即含氧量以每天約 0.37% 的速率增加, 表示開始恢復的過程.