單元 57: 冪級數與泰勒定理
(課本 §10.4)

一. 冪級數

定義. 型如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

的無窮級數, 稱作以 0 爲中心的冪級數 (power series); 型如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots$$

的無窮級數, 稱作以 c 爲中心的冪級數.

註. 在型式上, 冪級數爲無窮多項的 “多項式”; 足標 n 不一定要從 0 開始.

例如, 無窮級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

是一個以 0 爲中心的冪級數，其中等號右邊的第一項乃根據

$$0! = x^0 = 1$$

的約定所致；又無窮級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n} = (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \cdots$$

是一個以 1 爲中心的冪級數；最後無窮級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n} = (x+2) + \frac{(x+2)^2}{2} + \frac{(x+2)^3}{3} + \cdots$$

是一個以 -2 爲中心的冪級數，此乃因爲

$$x+2 = x-(-2)$$

並根據定義所致.

註. 因爲冪級數的值會隨著不同的 x 而改變，故可視冪級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

爲一 x 的函數 $f(x)$，亦即，

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

則 $f(x)$ 的定義域

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \text{ 收斂的 } x \right\}$$

問．如何求 $f(x)$ 的定義域？亦相當於如何求 x 使得冪級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

收斂？

答．首先，c 在 $f(x)$ 的定義域內．

爲何如此？因爲代入 $x = c$，得

$$\begin{aligned} f(c) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(c-c)^n \\ &= a_0 + 0 + 0 + 0 + \cdots = a_0 \end{aligned}$$

收斂，故 c 在 $f(x)$ 的定義域內．

還有其它的點嗎? 如何找到它們?

根據下述的事實, 最多除了兩個端點須特別判定外, 可決定出 $f(x)$ 的定義域.

事實: 對任一冪級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

下列三項中, 僅一項成立,

(1) 冪級數僅在 $x = c$ 收斂, 如圖示.

(2) 對所有的 x, 冪級數均收斂, 如圖示.

(3) 存在一個 $R > 0$, 當

$$|x-c| < R$$

時, 冪級數收斂; 當

$$|x-c| > R$$

時, 冪級數發散; 當

$$x = c \pm R$$

時, 未知, 需個別判斷, 有時可能相當困難, 如圖示.

註 1. 稱上述事實中的 R 為收斂半徑, 因為當 x 與 c 的距離在 R 以內, 冪級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

收斂. 針對第一種只在 $x=c$ 收斂的情況, 定義收斂半徑

$$R=0$$

針對對二種, 對所有的 x 均收斂的情況, 定義收斂半徑

$$R=\infty$$

註 2 針對上述的事實, 可採用比值檢定法決定 R, 並在必要以及可行下, 判定冪級數在端點是否收斂, 而確定出冪級數的定義域, 如下例.

例 1. 試求下列各項冪級數的收斂半徑 R.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+1)^n}{2^n}$

<解> (a) 視 x 爲一固定的實數，並經由化簡整理，以及代入法，得後項比前項的絕對值極限

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right|\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}\\ &= 0<1\end{aligned}$$

對所有固定的實數 x 均成立，故由比值檢定法，對所有的實數 x，冪級數

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

均收斂．因此，根據定義，收斂半徑

$$R=\infty$$

且定義域

$$D=\{x:-\infty<x<\infty\}$$

(b) 同 (a)，視 x 爲一固定的實數，並經由化簡整理，以及根據常數的極限就是常數本身，得後項比前項的絕對值

極限

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(x+1)^{n+1}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{(-1)^n(x+1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x+1}{2}\right| = \frac{|x+1|}{2}$$

故由比值檢定法知，當

$$\frac{|x+1|}{2}<1$$

時，冪級數收斂，亦相當於

$$|x+1|<2$$

或

$$-3<x<1$$

而得收斂半徑

$$R=2$$

如圖示.

問. 當 $x=-3$ 與 $x=1$, 亦即，兩個端點時，冪級數收斂或發散?

需要將兩個端點分別代入，形成兩個無窮級數，再根據判斷級數收斂或發散的檢定法判定，如下述.

首先，代入 $x = -3$，並經由化簡整理，得

$$原式 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1$$

接著，很明顯地，一般項的極限

$$\lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$$

故由一般項檢定法，級數發散.

代 $x = 1$，並經由化簡整理，得

$$原式 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

且一般項的極限

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n = \begin{cases} 1, & 若\ n\ 為偶數 \\ -1, & 若\ n\ 為奇數 \end{cases}$$

乃在 1 與 -1 上下震盪，故極限不存在，當然不為 0，亦由一般項檢定法知，級數發散.

因此，綜合上述的結論，冪級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(x+1)^n}{2^n}$$

的定義域

$$D = (-3, 1)$$

不含兩個端點.

問. 給定一函數, 是否能以一個冪級數表示? 亦即, 是否可將一個函數改寫成一個冪級數? 如何表示?

答. 下述的泰勒定理, 給予表示成冪級數的方式, 回答了部分的問題.

泰勒定理 (Taylor's Theorem). 若函數 $f(x)$ 可用一個以 c 爲中心的冪級數表示時, 則

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \\ &= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 \\ &\qquad + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-c)^3 + \cdots \end{aligned}$$

並稱此級數爲泰勒級數 (Taylor's series); 當 $c=0$ 時, 又稱作 Maclaurin series. 也就是說, 當函數 $f(x)$ 可以表示成冪級數時, 一定是一個泰勒級數.

例 2. 試將函數

$$f(x) = e^x$$

表成以 0 爲中心的冪級數，並求此冪級數的收斂半徑 R.

<解> 因爲是表成以 0 爲中心的冪級數，由泰勒定理知，需要先求出

$$f^{(n)}(0),\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

過程如下.

首先，

$$f^{(0)}(x) = f(x) = e^x$$

故

$$f^{(0)}(0) = f(0) = e^0 = 1$$

接著，對 x 微分，得

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

故

$$f'(0) = e^0 = 1$$

再對 x 微分，得

$$f''(x) = \frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

以及

$$f''(0) = e^0 = 1$$

同理，得

$$f^{(3)}(x) = e^x$$

且

$$f^{(3)}(0) = 1$$

$$\vdots$$

以及根據類推出的規則，

$$f^{(n)}(x) = e^x$$

且

$$f^{(n)}(0) = 1$$

因此，根據泰勒定理以及泰勒級數的公式，並代入上述的結論，得

$$\begin{aligned} e^x &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 \\ &\qquad + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\ &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

且由例 1 (a) 知, 收斂半徑

$$R = \infty$$

亦即, 對所有的實數 x,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

均可表示成冪級數.

例 3. 試將函數

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

表示成以 1 爲中心的冪級數, 並求此冪級數的收斂半徑 R, 以及計算 $f\left(\frac{1}{2}\right)$, 且與 $\frac{1}{x}$ 比較.

<解一> 如同例 2, 因爲是表成以 1 爲中心的冪級數, 由泰勒定理知, 需要先求出

$$f^{(n)}(1),\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

首先,

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{x}$$

故

$$f^{(0)}(1) = f(1) = 1$$

接著，對 x 微分，得

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{d}{dx}[x^{-1}] = -x^{-2}$$

故

$$f'(1) = -(1)^{-2} = -1$$

再對 x 微分，得

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}[-x^{-2}] \\ &= (-1)(-2)x^{-3} \\ &= (-1)^2(1)(2)x^{-3} = (-1)^2 2! x^{-3} \end{aligned}$$

其中最後一個式子乃是設法保留必要的過程，而能歸納出一般項的型式，並由此得

$$f''(1) = (-1)^2 2! = 2!$$

同理，得

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) &= \frac{d}{dx}[(-1)^2 2! x^{-3}] \\ &= (-1)^2 2!(-3)x^{-4} = (-1)^3 3! x^{-4} \end{aligned}$$

以及

$$f^{(3)}(1) = (-1)^3 3! = -3!$$

$$\vdots$$

最後，根據上述各式類推出的規則，

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$$

以及

$$f^{(n)}(1) = (-1)^n n!$$

因此，根據以 1 爲中心的泰勒級數的公式，並代入上述的結論以及化簡整理，得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 \\
&\qquad \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 + \cdots \\
&\qquad\qquad + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n + \cdots \\
&= 1 + (-1)(x-1) + \frac{2!}{2!}(x-1)^2 \\
&\qquad + \frac{-3!}{3!}(x-1)^3 + \cdots \\
&\qquad\qquad + \frac{(-1)^n n!}{n!}(x-1)^n + \cdots \\
&= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 \\
&\qquad\qquad + \cdots + (-1)^n (x-1)^n + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n \qquad (1)
\end{aligned}$$

其中最後一個式子以一般項表示，乃便於以比值檢定法確定收半徑，如下述.

將 x 視爲一固定的常數，並經由化簡整理，以及常數的極限就是常數本身，得後項比前項的絕對值極限

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{(-1)^n(x-1)^n}\right| &= \lim_{n\to\infty}|x-1| \\ &= |x-1|\end{aligned}$$

故由比值檢定法知，當

$$|x-1|<1$$

時，(1) 式等號左邊的冪級數收斂，得收斂半徑

$$R=1$$

亦即，此冪級數在

$$0<x<2$$

內收斂，且當

$$x<0 \text{ 或 } x>2$$

時，此冪級數發散.

又代入 $x=0$ 至 (1) 式的冪級數，並化簡整理，得級數

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}1$$

且一般項極限

$$\lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$$

故發散. 再代入 $x = 2$, 並化簡整理, 得級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(2-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

且一般項極限

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{若 } n \text{ 爲偶數} \\ -1, & \text{若 } n \text{ 爲奇數} \end{cases}$$

乃在 1 與 -1 上下震盪, 極限不存在, 當然不爲 0, 故由一般項檢定法, 級數發散.

因此, 綜合上述的結論, 冪級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(x-1)^n$$

的定義域

$$D = (0, 2)$$

不含兩個端點, 如圖示.

或視 x 爲固定常數, 並經由改寫, 得 (1) 式等號右邊的冪級數爲

$$\sum_{n=0}^{\infty} [-(x-1)]^n$$

乃一公比

$$r=-(x-1)$$

的等比級數，故根據等比級數檢定法，當公比的絕對值

$$|r|=|-(x-1)|=|x-1|<1$$

時，收斂；否則發散．因此，得收斂半徑

$$R=1$$

且定義域

$$D=\{x:|x-1|<1\}=(0,2)$$

<解二> 將 x 視爲公比，由等比級數檢定法，當公比的絕對值

$$|x|<1$$

時，

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}x^n &= 1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \\ &= \frac{1}{1-x} \qquad (2)\end{aligned}$$

接著一個根據上述公式的常用簡潔方法爲，設法將原式改寫爲

$$(\text{常數})\cdot\frac{1}{1-[k(x-c)]} \qquad (3)$$

其中 c 爲冪級數的中心, k 爲另一適當的常數後, 再將

$$k(x-c)$$

視爲公比, 代入 (2) 式, 並經由化簡整理, 即得一個以 c 爲中心的冪級數.

例如, 題目是求以 1 爲中心的冪級數, 故經由將 x 減 1, 再加 1, 以及改寫成上述型式的調整, 得

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{1+(x-1)}=\frac{1}{1-[-(x-1)]}$$

一個在型式上與 (2) 式完全相同的式子, 故將

$$-(x-1)$$

視爲公比並代入, 以及化簡整理, 得

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \sum_{n=0}^{\infty}[-(x-1)]^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n \qquad (4) \\ &= 1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3 \\ &\qquad +\cdots+(-1)^n(x-1)^n+\cdots\end{aligned}$$

且當公比的絕對值

$$|-(x-1)|=|x-1|<1$$

時，收斂；否則發散，故收斂半徑

$$R = 1$$

且定義域

$$D = \{x : |x-1| < 1\} = (0,2)$$

接著，將 $x = \frac{1}{2}$ 代入 (4) 式等號的右邊，並經由化簡整理，以及等比級數檢定法，得等比級數

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2}-1\right)^n &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n}\left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \frac{1}{1-1/2} = 2
\end{aligned}$$

剛好就是將 $\frac{1}{2}$ 代入 (4) 式等號左邊

$$\left.\frac{1}{x}\right|_{1/2} = 2$$

的值，故

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

如所求.

最後, 根據上述求得的冪級數以及它的定義域, 冪級數

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$$

僅在開區間 $(0,2)$ 上收斂, 且它的值爲 $\frac{1}{x}$, 並可表示成

$$\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n,\ 0<x<2$$

如圖示.

註 1. 例 3 乃在說明, 一函數僅在它的冪級數的定義域內, 當然在收斂半徑內, 被表示出.

註 2. 冪級數在它的收斂半徑內具有多項式的好性質, 如連續, 可逐項微分, 可逐項積分, 可做加, 減, 乘, 除, 合成等運算, 如下述例 4 的示範與說明.

註 3. 若將 $f(x)=\frac{1}{x}$ 表成以 2 爲中心的冪級數, 可經由先將 x 減 2, 再加 2, 並分子分母同除 2, 使分母的常數項成爲 1, 並改寫成 (3) 式的型式後, 可視

$$-\frac{x-2}{2}$$

爲公比, 代入 (2) 式以及化簡整理, 得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= \frac{1}{2+(x-2)} \\
&= \frac{1/2}{1-[-(x-2)/2]} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{x-2}{2}\right]^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-2)^n}{2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2}-\frac{x-2}{2^2}+\frac{(x-2)^2}{2^3}-\frac{(x-2)^3}{2^4} \\
&\qquad +\cdots+\frac{(-1)^n(x-2)^n}{2^{n+1}}+\cdots
\end{aligned}$$

且當公比的絕對值

$$\left|-\frac{x-2}{2}\right| = \left|\frac{x-2}{2}\right| < 1$$

亦相當於

$$|x-2| < 2$$

時, 收斂; 否則發散, 故收斂半徑

$$R = 2$$

且定義域

$$D = \{x : |x-2| < 2\} = (0,4)$$

亦即，表成以 2 爲中的的冪級數時，

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}}, \ 0 < x < 4$$

僅在開區間 $(0,4)$ 上，可將函數 $f(x) = \frac{1}{x}$ 表示成冪級數，如圖示．請自行嘗試以其它值爲中心的冪級數，以及對應的收斂半徑與表示式．

例 4．試將下列各函數表示成以給定的 c 爲中心的冪級數．

(a) $e^{-x^2}, \ (c = 0)$

(b) $e^{2x+1}, \ (c = 0)$

(c) $\dfrac{1}{1+x}, \ (c = 0)$

(d) $\ln x, \ (c = 1)$

(e) $\ln(1 + x^2), \ (c = 0)$

(f) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $(c = 0)$

<解> 因爲函數的型式較複雜，連續地求導函數會相當地冗長及複雜，故不宜以

$$f^{(n)}(c),\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

並根據泰勒級數的方式求冪級數，而應設法根據已知的冪級數，經由註 2 提及的性質，以簡潔，精確地方式求出對應的冪級數.

(a) 因爲原式爲 $-x^2$ 與指數函數 e^x 的合成函數，又已知 e^x 的以 0 爲中心的冪級數表示式爲

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,\ -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

故將 $-x^2$ 代入，並經由化簡整理，得

$$\begin{aligned} e^{-x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \\ &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots \end{aligned}$$

且當

$$-\infty < -x^2 < \infty$$

亦相當於

$$-\infty < x < \infty$$

時，此冪級數收斂，因而收斂半徑

$$R = \infty$$

以及定義域

$$D = (-\infty, \infty)$$

亦即，表成以 0 爲中心的冪級數時，

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}, \ -\infty < x < \infty$$

(b) 因爲是求以 0 爲中心的冪級數，故需經由改寫，並根據 (a) 小題的理由，代入 $2x$，以及化簡整理，得

$$\begin{aligned}
e^{2x+1} &= e \cdot e^{2x} \\
&= e \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e 2^n x^n}{n!} \\
&= e\left(1 + 2x + \frac{2^2x^2}{2!} + \frac{2^3x^3}{3!} + \cdots\right)
\end{aligned}$$

且當

$$-\infty < 2x < \infty$$

亦相當於

$$-\infty < x < \infty$$

時，此冪級數收斂，由此得收斂半徑

$$R = \infty$$

以及定義域

$$D = (-\infty, \infty)$$

亦即，表成以 0 爲中心的冪級數時，

$$e^{2x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e2^n x^n}{n!}, \ -\infty < x < \infty$$

(c) 因爲是求以 0 爲中心的冪級數，很明顯地，可將原式改寫成 (3) 式的型式，並視 $-x$ 爲公比，代入 (2) 式，以及化簡整理，得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &= \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \\
&= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots
\end{aligned}$$

且當公比的絕對值

$$|-x| = |x| < 1$$

亦相當於

$$-1 < x < 1$$

時, 此冪級數收斂; 否則發散, 故收斂半徑

$$R = 1$$

且定義域

$$D = (-1, 1)$$

亦即, 表成以 0 爲中心的冪級數時,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n,\ -1 < x < 1$$

(d) 因爲是求以 1 爲中心的冪級數, 且當 $x > 0$ 時,

$$\ln x = \int \frac{1}{x} dx$$

一個可行的方法是, 將 $\frac{1}{x}$ 表成以 1 爲中心的冪級數, 再根據冪級數可逐項積分的性質, 對 $\frac{1}{x}$ 的冪級數逐項積分, 而求得 $\ln x$ 的冪級數表示式, 亦即, 首先, 將 $\frac{1}{x}$ 的分母減 1, 再加 1, 並整理成 (3) 式的型式, 且視

$$-(x-1)$$

爲公比, 代入 (2) 式, 以及化簡整理, 得

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \frac{1}{1-[-(x-1)]} = \sum_{n=0}^{\infty}[-(x-1)]^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n \end{aligned} \qquad (5)$$

且當公比的絕對值

$$|-(x-1)| = |x-1| < 1$$

亦相當於

$$0 < x < 2$$

時, 此冪級數收斂; 否則發散.

接著, 將 (5) 式兩邊積分, 並根據可逐項積分的性質, 以及積分的冪次規則, 得

$$\begin{aligned}\ln x &= \int \frac{1}{x}dx \\ &= \int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\int(-1)^n(x-1)^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^{n+1}}{n+1} + C\end{aligned}$$

其中 C 爲需確定的積分常數.

將 $x = 1$ 代入上式，得

$$\ln 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1-1)^{n+1}}{n+1} + C$$

亦相當於

$$0 = 0 + C$$

亦即，

$$C = 0$$

因此，當 $0 < x < 2$ 時，以 1 爲中心的冪級數爲

$$\begin{aligned}
\ln x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1} \\
&= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} \\
&\qquad - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots
\end{aligned}$$

註. 經由逐項積分所得到的冪級數的定義域有可能會與原來被積分的冪級數的定義域不同，不同的地方是在兩個端點，若有的話，故需要確認後，才能正確地得到定義域，而

這項確認的過程通常會採用一些超出本書範圍的檢定法，故僅提及這個事實，不要求明確地寫出定義域，能說明在收斂半徑內的結果即可，例如，(d) 小題的冪級數表示式

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$$

的定義域爲

$$D = (0, 2)$$

但經由逐項積分後的冪級數表示式

$$\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1}$$

的定義域爲

$$D = (0, 2]$$

多了右端點 $x = 2$，此乃因爲代入 $x = 2$，經由化簡整理，得交替級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

並根據一個超出本書範圍的交替級數檢定法判斷爲收斂所致；另代入 $x = 0$，並經由化簡整理，得級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

乃 -1 乘上調和級數, 或

$$p = 1 \leq 1$$

的 p-級數, 故根據 p-級數檢定法, 發散, 左端點 $x = 0$ 不在定義域內.

(e) 因爲是求以 0 爲中心的冪級數, 且

$$\frac{d}{dx}[\ln(1+x^2)] = \frac{2x}{1+x^2} = 2x \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

乃 $2x$ 乘上一個在型式上與等比級數的公式, 即 (2) 式, 相似的式子, 故可經由改寫成 (3) 式的型式後, 表成以 0 爲中心的冪級數, 再逐項積分, 亦即, 視

$$-x^2$$

爲公比, 代入 (2) 式, 以及化簡整理, 得

$$\begin{aligned} \frac{2x}{1+x^2} &= 2x \cdot \frac{1}{1-(-x^2)} = 2x \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n \\ &= 2x \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \\ &= 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1} \qquad (6) \end{aligned}$$

且當公比的絕對值

$$|-x^2| = x^2 < 1$$

亦相當於

$$-1 < x < 1$$

時, 此冪級數收斂; 否則發散.

接著, 將 (6) 式兩邊積分, 並根據微分與積分的互逆性, 冪級數在收斂半徑內可逐項積分的性質, 積分的冪次規則, 以及化簡整理, 得

$$\begin{aligned}
\ln(1+x^2) &= \int \frac{2x}{1+x^2}dx \\
&= \int 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}dx \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty}\int(-1)^n x^{2n+1}dx \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{2n+2}+C \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2(n+1)}}{n+1}+C
\end{aligned}$$

其中 C 爲需要確定的積分常數.

將 $x=0$ 代入上式, 得

$$\ln 1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 0^{2(n+1)}}{n+1}+C$$

亦相當於

$$0 = 0 + C$$

故

$$C = 0$$

因此, 當 $-1 < x < 1$ 時, 以 0 爲中心的冪級數爲

$$\begin{aligned}\ln(1+x^2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2(n+1)}}{n+1} \\ &= x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \cdots\end{aligned}$$

事實上, 代入 $x = 1$ 與 $x = -1$, 均得交替級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

並根據交替級數檢定法, 爲收斂, 故定義域

$$D = [-1, 1]$$

比原先被積分的冪級數多出兩個端點.

(f) 因爲是求以 0 爲中心的冪級數, 且原式

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

是指數函數的合成與四則運算的表示式，故根據冪級數亦可做合成與四則運算的性質，經由指數函數的冪級數表示式，做對應的運算即可，亦即，首先，將 $-x$ 代入

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \end{aligned}$$

並化簡整理，得

$$\begin{aligned} e^{-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \\ &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \end{aligned}$$

接著，將上二式相加並除以 2，在奇次方項為異號，相互抵消下，分子為兩倍的偶次方項，並經由化簡整理，得

$$\begin{aligned} \frac{e^x + e^{-x}}{2} &= \frac{1}{2}\left(2 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{x^2}{2!} + 2 \cdot \frac{x^4}{4!}\right. \\ &\qquad \left. + 2 \cdot \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

因爲 e^x 的冪級數表示式的定義域

$$D = (-\infty, \infty)$$

故經由合成運算以及四則運算的冪級數表示式的定義域亦爲

$$D = (-\infty, \infty)$$

因此, 表成以 0 爲中心的冪級數時,

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \ -\infty < x < \infty$$

練習題 1. 試證二項級數

$$(1+x)^k = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{k}{n} x^n, \ -1 < x < 1$$

其中 k 爲任意實數, 且

$$\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}$$

爲廣義的二項係數.

練習題 2. 試將下列各函數表示成以給定的 c 爲中心的冪級數.

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$, $(c=0)$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$, $(c=0)$

(c) $\sqrt[3]{1+x}$, $(c=0)$

(d) $\sqrt{1-x^2}$, $(c=0)$

(e) $\dfrac{1}{x+2}$, $(c=1)$

(f) $\dfrac{1}{1+x}$, $(c=2)$