# 單元 8: 合成法
(課本 §4.5)

令隨機變數

$$X_1 \sim p_j = P(X_1 = j),\ j \geq 0$$

且隨機變數

$$X_2 \sim q_j = P(X_2 = j),\ j \geq 0$$

設有一有效率的方法可模擬 $X_1$ 及 $X_2$.

問. 如何根據此一模擬 $X_1$ 及 $X_2$ 的演算法來模擬

$$X \sim P(X = j) = \alpha p_j + (1 - \alpha) q_j,\ j \geq 0$$

其中 $\alpha$ 爲一滿足 $0 < \alpha < 1$ 的給定常數.

答. 可考慮如下的合成法 (composition method):
令隨機變數

$$U \sim \text{unif}(0, 1)$$

且與 $X_1$, $X_2$ 獨立. 定義隨機變數

$$X \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} X_1, & \text{若 } U < \alpha \\ X_2, & \text{若 } U \geq \alpha \end{cases}$$

則根據全機率律以及 $X$ 的定義,

$$\begin{aligned} P(X=j) &= P(X=j|U<\alpha)P(U<\alpha)+ \\ &\qquad P(X=j|U\geq\alpha)P(U\geq\alpha) \\ &= P(X_1=j|U<\alpha)P(U<\alpha)+ \\ &\qquad P(X_2=j|U\geq\alpha)P(U\geq\alpha) \\ &= P(X_1=j)P(U<\alpha)+ \\ &\qquad P(X_2=j)P(U\geq\alpha) \\ &= \alpha p_j+(1-\alpha)q_j \end{aligned}$$

如所求, 其中第三個等號成立乃因爲 $U$ 與 $X_1$, $X_2$ 相互獨立, 而得出條件機率等於無條件機率所致, 第四個等號成立乃根據 $X_1$, $X_2$ 以及 $U$ 的分布, 而得出對應的事件機率.

因此, 得如下對應的

## 演算法:

(1) 生成一仿隨機數 $U$.

(2) 若 $U<\alpha$, 則令 $X=X_1$ 且結束.

(3) 令 $X = X_2$ 且結束.

例 1. 令隨機變數

$$X \sim r_j = \begin{cases} 0.05, & \text{若 } j = 1,2,3,4,5, \\ 0.15, & \text{若 } j = 6,7,8,9,10. \end{cases}$$

試求一模擬 $X$ 的有效率演算法.

<解> 當然可以根據最基本的離散反轉換法, 由 $r_j$ 所分割的子區間, 一個一個地檢查而生成 $X$, 但沒有效率並在執行程式時會用到較多的記憶空間. 然而已知很容易生成離散均勻隨機變數, 如

$$\text{Int}(nU) + 1 \sim \text{discrete unif}(n)$$

所以, 一個有效率的方法乃是設法將 $X$ 表示成離散均勻隨機變數的線性組合, 以合成法生成 $X$, 如下述.

首先, 因爲 $X$ 的可能值爲 $\{1, \ldots, 10\}$, 故可先考慮

$$X_1 \sim \text{discrete unif}(10)$$

接著, 需要選取適當的常數 $\alpha$ 與隨機變數 $X_2$. 一個直接的嘗試爲

$$0.05 = 0.5 \times 0.1 + (1 - 0.5) \times 0, \quad j = 1,2,3,4,5 \qquad (1)$$

亦即, 選取 $\alpha$ 爲 0.5, 一個考量是

$$p_j \stackrel{\text{def}}{=} P(X_1 = j) = 0.1,\ j = 1, 2, \ldots, 10$$

且

$$\alpha \times 0.1 = 0.05$$

而導致

$$\alpha = 0.5$$

又

$$\begin{aligned} 0.15 &= 0.05 + 0.1 \\ &= 0.5 \times 0.1 + (1 - 0.5) \times 0.2, \\ &\qquad j = 6, 7, 8, 9, 10 \quad (2) \end{aligned}$$

所以, 綜合 (1) 式與 (2) 式, 可考慮

$$X_2 \sim q_j = \begin{cases} 0, & \text{若 } j = 1, 2, 3, 4, 5, \\ 0.2, & \text{若 } j = 6, 7, 8, 9, 10. \end{cases}$$

亦即,

$$X_2 \sim \text{discrete unif}(\{6, \ldots, 10\})$$

則可得

$$\begin{aligned} r_j &= 0.5 \times p_j + (1 - 0.5) \times q_j, \\ &\qquad j = 1, 2, \ldots, 10 \end{aligned}$$

最後, 根據合成法, 得如下對應的

## 演算法:

(1) 生成一仿隨機數 $U_1$ (用來決定 $X = X_1$ 或 $X = X_2$).

(2) 生成一仿隨機數 $U_2$ (用來生成 $X_1$ 或 $X_2$).

(3) 若 $U_1 < 0.5$, 則令

$$X = \mathrm{Int}(10U_2) + 1$$

亦即, $X = X_1$, 且結束.

(4) 令

$$X = \mathrm{Int}(5U_2) + 6$$

亦即, $X = X_2$, 且結束.

爲何演算法中的 (4) 成立? 因爲

$$\mathrm{Int}(5U_2) + 1 \sim \mathrm{unif}(\{1, \ldots, 5\})$$

故

$$\begin{aligned}\text{Int}(5U_2)+6 &= \text{Int}(5U_2)+1+5 \\ &\sim \text{unif}(\{6,\ldots,10\})\end{aligned}$$

如所求.

**推廣** (至 $n$ 個線性組合). 令

$$F_i(x),\ i=1,\ldots,n$$

爲 $n$ 個分布函數且 $n$ 個給定常數

$$\alpha_i,\ i=1,\ldots,n$$

滿足

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$$

定義

$$F(x)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i F_i(x)$$

稱作 $F_i$ 的合成分布 (mixture 或 composition), 則 $F(x)$ 確實爲爲一分布函數 (自行驗證), 且模擬以 $F(x)$ 爲其分布函數的隨機變數 $X$ 的演算法如下.

**演算法:**

(1) 模擬

$$I \sim P(I = i) = \alpha_i, \ i = 1, \ldots, n$$

(2) 模擬

$$X_I \sim F_I$$

(3) 令 $X = X_I$

爲何 $X \sim F(x)$? 對任意實數 $x$, 根據演算法, 全機率律, 以及演算法中的 (1) 與 (2) 相互獨立,

$$\begin{aligned}
P(X \le x) &= P(X_I \le x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(X_I \le x, I = i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(X_i \le x, I = i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(X_i \le x) P(I = i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_i(x) = F(x)
\end{aligned}$$

其中第五個等號成立乃根據隨機變數 $I$ 與 $X_i$ 的分布, 而得出的對應事件機率. 因此, $X \sim F(x)$, 如所求.