單元 18: 母體期望值的區間估計
(課本 §7.2)

問. 如何更具體, 精確地以 $\overline{X}$ 估計 θ?

答. 可以求 θ 的信賴區間, 亦即, 區間估計, 亦相當於 §7.1 中所提到的偏離度, 如下述.

由 Slutsky 定理,

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\overline{X}-\theta}{S/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right) \approx P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) \quad (1)$$

其中 $z_\alpha > 0$ 且滿足

$$P(Z > z_\alpha) = \alpha$$

亦即, z_α 是使得標準常態分布隨機變數 Z 的尾部機率 (tail probability) 爲 α 的實數, 也就是說, Z 的 pdf 在 z_α 右邊所圍成的區域面積爲 α, 如圖示.

接著, 根據隨機變數在一區間內的機率公式, 以及 Z 的 pdf 對於縱軸的對稱性,

$$\begin{aligned} & P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) \\ = \ & Z \text{ 的 pdf 在區間 } (-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2}) \text{ 上所圍出的區域面積} \\ = \ & 1-\alpha \end{aligned} \quad (2)$$

如圖示.

合併 (1) 式與 (2) 式, 得

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\overline{X}-\theta}{S/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right) \approx 1-\alpha$$

將上式左項中括號內同乘 $\frac{S}{\sqrt{n}}$, 得

$$P\left(-z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} < \overline{X}-\theta < z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) \approx 1-\alpha$$

再同乘 -1, 經由改變不等號, 得

$$P\left(-z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} < \theta-\overline{X} < z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) \approx 1-\alpha$$

最後, 同加 $\overline{X}$, 得

$$P\left(\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} < \theta < \overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) \approx 1-\alpha$$

若 $\overline{X}$ 與 S 的觀察值分別爲 $\overline{x}$ 與 s, 則稱區間

$$\overline{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

爲 θ 的 (近似) $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間 (簡稱 C.I., confindence interval).

所對應的生成 θ 的 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間的演算法, 與 §7.1 中何時停止的演算法類似, 如下述.

演算法:

(1) 先選取一區間長度 l, 亦相當於 §7.1 中所選取的偏離度.

(2) 至少生成 100 筆資料.

(3) 繼續模擬, 直至生成的 k 筆資料 ($k \geq 100$) 滿足

$$2z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{k}} < l$$

才停止.

(4) 得一 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間

$$\overline{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{k}}$$

其長度小於 l.

註 1. 若以

$$\overline{x} \pm \frac{l}{2}$$

為區間估計, 則其信賴度大於或等於 $100(1-\alpha)\%$.

為何如此? 根據所決定的資料筆數 k, 得

$$z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{k}} < \frac{l}{2}$$

由此可導出, 當 k 夠大時,

$$\begin{aligned} P\left(|\overline{X}-\theta| < \frac{l}{2}\right) &\geq P\left(|\overline{X}-\theta| < z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{k}}\right) \\ &= P\left(\left|\frac{\overline{X}-\theta}{S/\sqrt{k}}\right| < z_{\alpha/2}\right) \\ &\approx P(|Z| < z_{\alpha/2}) \\ &= 1-\alpha \end{aligned}$$

如所求.

註 2. 與 §7.1 類似, 若估計一事件發生的機率 p, 則

(i) p 的 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間爲

$$\overline{x} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}}$$

(ii) 求信賴區間的演算法乃是將上述演算法中的 S 換成

$$\sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})}$$