

單元 16: 一維修問題

(課本 §6.7)

設一作業系統在同時有 4 部機器運轉時，才有正常的生產作業。另有 3 部備用機器。若有一部機器壞了，則送修，並以備用的機器取代，且修好的機器加入備用行列，如圖示。假設

- (1) 只有一人維修，且以 FCFS 的原則處理。
- (2) 維修時間 $S \sim G$ 。
- (3) 每部機器的壽命 $X \sim F$ 。

問。平均的掛掉時間 (crash time) T 為何？此處的掛掉時間 T 乃指整個作業系統停擺的時間，亦即，當一部機器壞了且無備用機器取代的時間。

<解> 令事件為

$t_d = 4$ 部運轉的機器中，最早的機器損壞時間

亦即, 令

$$t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$$

為 4 部機器經大小排序後的損壞時間, 則

$$t_d = t_1$$

以及

$$t_r = \text{正在維修的機器的修復時間}$$

令

$$r = \text{損壞的機器數, 含正在維修的}$$

則掛掉時間 T 乃相當於 $r = 4$ 的時間, 且 r 是由 t_d 與 t_r 所決定, 詳述如下的觀察.

因此, 在系統掛掉與掛掉之間的狀態是獨立且相同分布的情況下, 可用模擬法估計平均掛掉時間.

觀察: (i) 若

$$t_d < t_r$$

則 r 增加 1, 且

$$\text{新的 } t_d = \min\{t_d + X, t_2, t_3, t_4\} \quad (1)$$

其中 $t_d + X$ 為換上的備用機器的損壞時間 (若有的話, 亦即, 當 $r \leq 3$ 時), 以及 t_r 未變, 如圖示.

(ii) 若

$$t_r \leq t_d$$

則 r 減少 1, 且

$$\text{新的 } t_r = t_r + S \quad (2)$$

其中 $t_r + S$ 為下一個損壞機器的修復時間 (若有的話, 亦即, 當 $r \geq 1$ 時), 以及 t_d 未變, 如圖示.

(iii) 若

$$r = 0$$

則等到 t_d 時, r 增加 1, 且

$$t_r = t_d + S \quad (3)$$

其中 $t_d + S$ 為換下來並馬上送修的損壞機器的修復時間, 以及

$$\text{新的 } t_d = \min\{t_d + X, t_2, t_3, t_4\} \quad (4)$$

其中 $t_d + X$ 為換上的備用機器的損壞時間, 如圖示.

由 (1) - (4) 式知, 新的 t_d 與 t_r 均可由舊的 t_d, t_r 與資訊求得, 亦即, 形成一迭代公式. 故, 程式是可行的.

所以, 令 t 表示事件發生的時間, 且由上述的觀察, 可得如下的

演算法:

(1) 令 $t = 0$ 且 $r = 0$.

(2) 生成 4 部機器的壽命 ($\sim F$), 且排序, 得

$$X_1 \leq X_2 \leq X_3 \leq X_4$$

(3) 生成 4 部機器的損壞時間, 得

$$t_1 = t + X_1, \quad t_2 = t + X_2$$

$$t_3 = t + X_3, \quad t_4 = t + X_4$$

且令 $t_d = t_1$.

(4) 若 $r = 0$, 則跳到 (11).

(5) 若 $t_d < t_r$, 則跳到 (11).

- (6) 令 $t = t_r$ 且 $r = r - 1$.
- (7) 若 $r = 0$, 則跳到 (11).
- (8) 生成維修時間 $S \sim G$.
- (9) 令 $t_r = t + S$.
- (10) 回到 (5).
- (11) 令 $t = t_d$ 且 $r = r + 1$.
- (12) 若 $r > 3$, 則跳到 (17).
- (13) 生成備用機器的壽命 $X \sim F$.
- (14) 將 $t + X, t_2, t_3, t_4$ 排序, 得

$$t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$$

且令 $t_d = t_1$.

(15) 若 $r = 1$, 則回到 (8).

(16) 回到 (5).

(17) 令掛掉時間 $T = t$ 且結束.

註. 每執行演算法一回, 得一個掛掉時間 T . 執行夠多的回數後, 由所得的掛掉時間求平均值, 即得掛掉時間期望值 $E(T)$ 的估計值. 至於多少回才算夠多, 則是第七章要探討的內容.

練習題. 列出一些事件 (t_1, t_2, t_3, t_4 及 t_r), 並以手算法驗證此演算法無誤後, 在機器壽命

$$X \sim \exp(1)$$

以及維修時間

$$S \sim \exp(2)$$

之下, 寫一程式模擬掛掉時間 T .