

## 單元 28: Gamma 機率分布

(課本 §4.6)

右偏斜 (right-skewed) 機率分布的 pdf 的圖形如下，特徵為：大部分面積位於原點附近，隨著

$y \uparrow$

對應的

pdf 漸漸  $\downarrow$

其中一類可用於模型化：飛機引擎的故障間隔時間，顧客的間隔時間，汽車檢修時間，... 等，稱作 gamma 機率分布，正式定義如下：

定義 1.  $Y \sim \text{gamma}(\alpha, \beta)$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , 若且為若  $Y$  的 pdf

$$f(y) = \begin{cases} \frac{y^{\alpha-1} e^{-y/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}, & 0 \leq y < \infty \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

註 1.  $\Gamma(\alpha)$  為熟知的 gamma 函數，性質如下：

(1)  $\Gamma(1) = 1$ , 因為根據 gamma 函數的定義,

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^{\infty} e^{-y} dy \\ &= -e^{-y} \Big|_0^{\infty} \\ &= 1 - e^{-\infty} = 1\end{aligned}$$

(2) 針對  $\alpha > 1$ ,  $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$ , 因為根據 gamma 函數的定義,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy \quad (1)$$

接著根據分部積分, 令

$$\begin{aligned}u = y^{\alpha-1} &\Rightarrow du = (\alpha - 1)y^{\alpha-2} dy \\ dv = e^{-y} dy &\Rightarrow v = -e^{-y}\end{aligned}$$

由 (1) 式可得

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha) &= uv - \int v du \\ &= -y^{\alpha-1} e^{-y} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} (\alpha - 1)y^{\alpha-2} e^{-y} dy \\ &= -\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^{\alpha-1}}{e^y} + \\ &\quad (\alpha - 1) \int_0^{\infty} y^{(\alpha-1)-1} e^{-y} dy \\ &= 0 + (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1) \quad (\text{因為 } \alpha - 1 > 0) \\ &= (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)\end{aligned}$$

(3) 針對正整數  $n$ ,  $\Gamma(n) = (n - 1)!$ , 因為根據 (1) 與 (2),

$$\begin{aligned}\Gamma(n) &= (n - 1)\Gamma(n - 1) \\ &= (n - 1)(n - 2)\Gamma(n - 2) \\ &\quad \vdots \\ &= (n - 1)(n - 2) \cdots (1)\Gamma(1) \\ &= (n - 1)!\end{aligned}$$

註 2.  $\alpha = 1, 2, 4$  且  $\beta = 1$  的 gamma pdf 的圖形如下.

不同的  $\alpha$  會產生不同的型態 (shape), 故稱參數  $\alpha$  為型態參數 (shape parameter).

設  $Y \sim \text{gamma}(\alpha, \beta)$ , 則  $cY$ ,  $c > 0$  (常數), 是將度量值的尺度 (scale) 放大  $c$  倍, 而此時  $cY$  依然為一 gamma 分布, 其型態參數依然為  $\alpha$  (未變), 但卻有不同的  $\beta$  值 (此結果待證), 故稱參數  $\beta$  為尺度參數 (scale parameter), 亦即,  $\beta$  的改變會有對應尺度的改變.

註 3. 若  $\alpha$  為整數,  $Y \sim \text{gamma}(\alpha, \beta)$  的 cdf (分布函數) 可表成某特定的卜松機率的和 (參看習題

4.99), 故可求出真確值 (closed-form). 若  $\alpha$  不為整數, 且  $0 < a < b < \infty$  時,

$$P(a \leq Y \leq b) = \int_a^b \frac{y^{\alpha-1} e^{-y/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} dy$$

的完整型 (closed-form) 不可能求得, 因此需查表求其近似值.

定理 4.8. 設  $Y \sim \text{gamma}(\alpha, \beta)$ , 則期望值

$$\mu = E(Y) = \alpha\beta$$

且變異數

$$\sigma^2 = \text{Var}(Y) = \alpha\beta^2$$

<證> 根據期望值的定義,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y f(y) dy \\ &= \int_0^{\infty} y \left( \frac{y^{\alpha-1} e^{-y/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \right) dy \\ &= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} y^\alpha e^{-y/\beta} dy \\ &= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \cdot \beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha + 1) \\ &= \beta \cdot \frac{\alpha \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha\beta \end{aligned}$$

上式中第四個等號成立乃因為  $\text{gamma}(\alpha, \beta)$  的 pdf 的完整積分爲 1, 亦即

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{\alpha-1} e^{-y/\beta}}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)} dy = 1$$

且可由此導出

$$\int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y/\beta} dy = \beta^{\alpha} \Gamma(\alpha) \quad (2)$$

最後, 再根據 (2) 式可導出

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} y^{\alpha} e^{-y/\beta} dy &= \int_0^{\infty} y^{(\alpha+1)-1} e^{-y/\beta} dy \\ &= \beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1) \end{aligned}$$

又根據隨機變數函數的期望值公式以及 (2) 式,

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \int_0^{\infty} y^2 \frac{y^{\alpha-1} e^{-y/\beta}}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)} dy \\ &= \frac{1}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} y^{\alpha+1} e^{-y/\beta} dy \\ &= \frac{1}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)} \cdot \beta^{\alpha+2} \Gamma(\alpha+2) \\ &= \beta^2 \cdot \frac{(\alpha+1)\alpha \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \\ &= \alpha(\alpha+1)\beta^2 \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\text{Var}(Y) &= E(Y^2) - [E(Y)]^2 \\ &= \alpha(\alpha + 1)\beta^2 - \alpha^2\beta^2 \\ &= \beta^2(\alpha^2 + \alpha - \alpha^2) \\ &= \alpha\beta^2\end{aligned}$$

Gamma 分布隨機變數的 2 特例:

特例一.

定義 2. 令  $\nu$  爲一正整數.

$$Y \sim \chi^2(\nu)$$

稱作自由度爲  $\nu$  的卡方分布 (Chi-square distribution with  $\nu$  degree of freedom), 若且爲若

$$Y \sim \text{gamma}(\nu/2, 2)$$

亦即,

$$\alpha = \nu/2, \beta = 2$$

的 gamma 分布就是自由度爲  $\nu$  的卡方分布.

定理 4.9. 若  $Y \sim \chi^2(\nu)$ , 則期望值

$$\mu = E(Y) = \nu$$

且變異數

$$\sigma^2 = \text{Var}(Y) = 2\nu$$

<證> 首先, 根據卡方分布的定義,

$$\begin{aligned} Y &\sim \chi^2(\nu) \\ &\sim \text{gamma}(\nu/2, 2) \end{aligned}$$

因此, 由定理 4.8 得期望值

$$E(Y) = \frac{\nu}{2} \cdot 2 = \nu$$

以及變異數

$$\text{Var}(Y) = \frac{\nu}{2} \cdot 2^2 = 2\nu$$

特例二.

定義 3. 令  $\beta > 0$ .

$$Y \sim \exp(\beta)$$

稱作參數為  $\beta$  的指數分布, 若且為若

$$Y \sim \text{gamma}(1, \beta)$$

亦即,  $\alpha = 1$  的 gamma 分布就是參數為  $\beta$  的指數分布, 其 pdf

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-y/\beta}, & y \geq 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

定理 4.10. 設  $Y \sim \exp(\beta)$ , 則期望值

$$\mu = E(Y) = \beta$$

且變異數

$$\sigma^2 = \text{Var}(Y) = \beta^2$$

<證> 根據指數分布的定義,

$$Y \sim \exp(\beta) \sim \text{gamma}(1, \beta)$$

因此, 由定理 4.8 得

$$E(Y) = 1 \cdot \beta = \beta$$

且

$$\text{Var}(Y) = 1 \cdot \beta^2 = \beta^2$$



註 1. 指數分布的“無記憶性質”(memoryless property): 設  $Y \sim \exp(\beta)$ . 則對任意的  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,

$$P(Y > a + b | Y > a) = P(Y > b)$$

亦即, “某零件已用了  $a$  個單位時間, 可再用至少  $b$  個單位時間的機會”與“一新零件可用至少  $b$  個單位時間的機會”一樣, 如同可忽略已經過之事, 像無記憶一般, 如圖所示. 故有此種無記憶性質的零件, 如保險絲, 的壽命就可用指數隨機變模型化.

<證> 首先根據條件機率的定義,

$$\begin{aligned} P(Y > a + b | Y > a) \\ &= \frac{P((Y > a + b) \cap (Y > a))}{P(Y > a)} \end{aligned} \quad (3)$$

因爲

$$Y > a + b \Rightarrow Y > a$$

故

$$(Y > a + b) \subseteq (Y > a)$$

因此, 由 (3) 式, 得

$$P(Y > a + b | Y > a) = \frac{P(Y > a + b)}{P(Y > a)} \quad (4)$$

又對任意的  $c > 0$ ,

$$\begin{aligned}
 P(Y > c) &= \int_c^{\infty} \frac{1}{\beta} e^{-y/\beta} dy \\
 &= -e^{-y/\beta} \Big|_c^{\infty} \\
 &= e^{-c/\beta} - e^{-\infty} \\
 &= e^{-c/\beta}
 \end{aligned} \tag{5}$$

最後，由 (4) 式與 (5) 式，得

$$\begin{aligned}
 P(Y > a + b | Y > a) &= \frac{e^{-(a+b)/\beta}}{e^{-a/\beta}} \\
 &= e^{-b/\beta} \\
 &= P(Y > b)
 \end{aligned}$$

註 2. 在離散分布中，有無記憶性質的為幾何分布 (geometric distribution)，亦即，設  $Y \sim \text{geometric}(p)$ ，則對任意的整數  $m > 0$ ,  $n > 0$ ,

$$P(Y > m + n | Y > m) = P(Y > n)$$

<證> 首先，根據條件機率的定義以及  $Y > m + n \Rightarrow Y > m$ ，可得

$$P(Y > m + n | Y > m) = \frac{P(Y > m + n)}{P(Y > m)} \tag{6}$$

又對任一整數  $k \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} P(Y > k) &= P(\text{前面 } k \text{ 次試驗均失敗}) \\ &= q^k \end{aligned} \quad (7)$$

因此, 由 (6) 式與 (7) 式, 得

$$\begin{aligned} P(Y > m + n | Y > m) &= \frac{q^{m+n}}{q^m} \\ &= q^n \\ &= P(Y > n) \end{aligned}$$

註 3. 指數分布與幾何分布之間的一有趣關係 (習題 4.75): 設  $Y \sim \exp(\beta)$ . 定義

$$X \stackrel{\text{def}}{=} k, \text{ 若 } k - 1 \leq Y < k, k = 1, 2, 3, \dots$$

則

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(k - 1 \leq Y < k) \\ &= \int_{k-1}^k \frac{1}{\beta} e^{-y/\beta} dy \\ &= -e^{-y/\beta} \Big|_{k-1}^k \\ &= e^{-(k-1)/\beta} - e^{-k/\beta} \\ &= \left(e^{-1/\beta}\right)^{k-1} \left(1 - e^{-1/\beta}\right) \end{aligned}$$

$k = 1, 2, 3, \dots$  故,

$$X \sim \text{geometric}(1 - e^{-1/\beta})$$

與直覺相符. 此乃因為根據  $X$  的定義,

$X =$  到零件壞掉所經過的單位時間數

又根據  $Y$  的無記憶性質,

在任一單位時間內零件壞掉的機率

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \frac{1}{\beta} e^{-y/\beta} dy \\ &\quad (\text{根據無記憶性質}) \\ &= -e^{-y/\beta} \Big|_0^1 \\ &= 1 - e^{-1/\beta} \end{aligned}$$

故, 直覺上

$$X \sim \text{geometric}(1 - e^{-1/\beta})$$