單元 26: 均匀機率分布
(課本 §4.4)

若連續隨機變數 Y 落在等長區間內的機率均相等 (無論這些區間的起點爲何), 則稱 Y 有均匀機率分布, 正式定義如下:

定義 1. 設 $\theta_1 < \theta_2$, 則 $Y \sim \text{unif}(\theta_1, \theta_2)$ 若且爲若機率密度函數 (pdf)

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}, & \theta_1 \le y \le \theta_2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

並稱隨機變數 Y 有均匀機率分布 (uniform probability distribution).

註. $f(y)$ 的圖形如下.

故在 $[\theta_1, \theta_2]$ 內, 等長區間上的區域面積 ($= Y$ 落在等長區間內的機率) 均等於 $\frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \cdot$ (區間長度).

定義 2. 用以決定 pdf 特定型式的常數稱作 pdf 的參數 (parameter), 如均匀 (uniform) pdf 的參數爲 θ_1 與 θ_2.

事實. 設在 (0, t) 內某事件發生的次數 $Y \sim$ Poisson(λ). 若已知在 (0, t) 內剛好只有一事件發生, 則此事件發生的時間 $\sim$ uniform(0, t).

例 1. 設達到收銀台的顧客數爲卜松分布. 若已知在某一給定的 30 分鐘內, 只有一個顧客, 試求此顧客在最後 5 分鐘內到達的機率.

<解> 根據上述的事實, 此顧客到達的時間

$$Y \sim \text{unif}(0, 30)$$

且

$$\begin{aligned}
\text{所求} &= P(25 \le Y \le 30) \\
&= \int_{25}^{30} \frac{1}{30} dy \\
&= \frac{5}{30} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

事實上, 在任何 5 分鐘的區間內到達的機率均爲 $\frac{1}{6}$ (此乃均勻分布的特性).

定理 4.6. 設 $Y \sim \text{unif}(\theta_1, \theta_2)$, 則期望值

$$\mu = E(Y) = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

且變異數

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{12}(\theta_2 - \theta_1)^2$$

<證> 根據期望值的定義及均勻分布的 pdf,

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y f(y) dy \\
&= \int_{\theta_1}^{\theta_2} y \cdot \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} dy \\
&= \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \cdot \frac{1}{2} y^2 \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} (\theta_2^2 - \theta_1^2) \\
&= \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)
\end{aligned}$$

剛好是兩參數 θ_1 與 θ_2 的中點. 又根據隨機變數的函數的期望值公式以及均勻分布的 pdf,

$$\begin{aligned}
E(Y^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y) dy \\
&= \int_{\theta_1}^{\theta_2} y^2 \cdot \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} dy \\
&= \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \cdot \frac{1}{3} y^3 \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \\
&= \frac{1}{3} \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} (\theta_2^3 - \theta_1^3)
\end{aligned}$$

接著展開上式化簡後, 得

$$\begin{aligned}
&E(Y^2)\\
&= \frac{1}{3}\frac{1}{\theta_2-\theta_1}(\theta_2-\theta_1)(\theta_2^2+\theta_1\theta_2+\theta_1^2)\\
&= \frac{1}{3}(\theta_2^2+\theta_1\theta_2+\theta_1^2)
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(Y) &= E(Y^2)-\mu^2\\
&= \frac{1}{3}(\theta_1^2+\theta_1\theta_2+\theta_2^2)\\
&\qquad -\frac{1}{4}(\theta_1^2+2\theta_1\theta_2+\theta_2^2)\\
&= \frac{1}{12}(4\theta_1^2+4\theta_1\theta_2+4\theta_2^2\\
&\qquad -3\theta_1^2-6\theta_1\theta_2-3\theta_2^2)\\
&= \frac{1}{12}(\theta_1^2-2\theta_1\theta_2+\theta_2^2)\\
&= \frac{1}{12}(\theta_2-\theta_1)^2
\end{aligned}$$