# 單元 1: 何謂統計?
(課本 §1.1-§1.5)

## 一. 簡介

統計技術 (方法) 幾乎應用在生活的每一個層面, 諸如:

- 民調: 選前收集選民的回應並預測選舉的結果.
- 消費者意見: 提供資訊以便預測產品的喜好度.
- 醫學研究人員: 執行實驗以決定各種藥物的療效, 並控制作用在人類上的環境條件, 以便推論出各種疾病的適當療法.
- 工程師: 針對產品品質特性及各種可控制的製作過程變數取樣, 以便確認出與產品品質相關的關鍵變數.
- 品管: 送貨前, 針對新製造的產品抽樣, 以便做出送出或保留的決策.

- 經濟學家: 觀察一段期間的經濟健康指標 (indices of economic health), 並用此資訊預測未來的經濟狀況.

統計技術在達成以上每一個實際問題的目標上, 都扮演著一個重要的角色. 而這些技術的基礎理論的發展正是本系列課程的焦點.

在探討統計理論前, 先要對統計的定義及其目標的敘述有所認識. 各家的說法如下 (雖然莫衷一是, 但均有一些共通點);

1. 韋氏字典: 數學的一支, 處理大量數據的收集, 分析, 解釋, 與呈現.

2. Sturt and Ord (1991): 科學方法的一支, 處理透過計數 (counting) 或度量 (measuring) 母體特性而得的資料 (data, 數據).

3. Rice (1995): 本質上是分析資料的過程, 特別針對有隨機特性的資料.

4. Frenund and Walpole (1987): 涵蓋根據觀察資料做出推論的科學以及面對不確定性作決策的整個問題.

5. Mood, Graybill, and Boes (1974): 科學方法的技術, 並牽涉到 (i) 實驗及研究的設計與 (ii) 統計推論.

## 共通點:

1. 收集資料並以推論爲其目標.

2. 由一大群資料中 (無論現存的, existent 或觀念上的, conceptual), 抽樣出一子集合, 以便對整個集合的特性推論.

故, 各家均暗示 (引申出): 統計是一門以推論爲其目標的訊息論. (Statistics is a theory of information, with inference making as its objective.)

註 1. 感興趣並作爲探討目標的大資訊體稱作母體 (population), 由其中抽選出的子集合稱作樣本 (sample). 母體的分類:

**(1)** 現存的 (existing, existent), 如所有選民構成的母體 (實際, 有限, 存在的).

**(2)** 觀念上的 (conceptual), 如三個已製造出的太空船導航系統中某一點的具體電壓, 此三個電壓可作爲未來根據同樣過程製造出的所有導航系統在同一點電壓的集合 (此爲一觀念上的母體, 因爲目前不存在) 的代表值; 醫學實驗中病人的度量值可作爲目前所有罹患此病以及未來將患此病的病患的度量值的集合 (爲一觀念上的母體) 的代表值.

註 2. 美國工業界及政府每年花費數十億美金, 透過實驗設計, 問卷調查, 或其他收集資料的程序來獲得資料, 以便推論. 故用於推論出母體某些特性的資訊 (訊息) 是一特定數量的購買, 並產生出相關優良程度 (degree of goodness, 準確度) 的推論 (估計, estimation 或決策, decision). 簡言之,

購買特定數量的資訊

$\Downarrow$

附優良程度 (準確度) 的推論 (估計或決策)

**註 3.** 統計的目標: 根據由母體中取出樣本所含的資訊, 針對母體作推論, 並提供此推論的優良程度 (準確度).

## 二. 特徵化一組度量 (Characterizing a Set of Measurements): 圖形法 (Graphical Methods)

透過檢視產生母體的過程, 發展出將一組度量值特徵化的概念, 以致於對母體有部份或全面的描述 (亦即, 推論), 並能解決實際, 非統計性的問題, 如, 確定影響商業利潤的重要變數以致於某製造商能決定出最佳條件而獲致最大利潤.

一個母體 (或任一組度量值) 可以相對頻率分布 (relative frequency distribution) 將其特徵化後, 並以相對頻率直方圖 (relative frequency histogram) 表現之. 如一組 10 個度量值如下:

$$2.1, 2.4, 2.2, 2.3, 2.7, 2.5, 2.4, 2.6, 2.6, 2.9$$

則可以如下的相對頻率圖:

將其特性表現出.

推論: 任選一度量值, 其落入 $[2.05, 2.45]$ 的機率爲

$$0.2 + 0.3 = 0.5$$

註 1. 製造直方圖的原則

**(1)** 分割點的選取以度量值不落在其上爲原則.

**(2)** 將度量值的範圍分成 5 到 20 個區間, 並採取〝大量的度量值選用較多的分割區間〞.

註 2. 直方圖可提供機率性的解釋 (亦即, 推論).

## 三. 特徵化一組度量: 數值法 (Numerical Methods)

二種數值法:

**(1)** 中心傾向量度 (measure of central tendency)

最常用的中心傾向量度爲平均數 (mean, 又稱作算數平均數), 定義如下:

定義. $n$ 個度量值 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 的樣本的平均數 (mean)

$$\bar{y} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$$

對應的母體平均數以 $\mu$ 表示之.

註 1. 通常無法測得母體平均數 $\mu$, 它是一個欲由樣本估計的未知常數.

註 2. 僅有資料分布的中心量度無法適當地描述出 (特徵化) 一組度量值, 如下二圖:

它們有相同的中心量度, 卻有不同的分散程度.

**(2)** 分散性量度 (measure of dispersion or variance)

最常用的分散性量度爲變異數 (variance), 定義如下:

**定義.** $n$ 個度量值 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 的樣本的變異數

$$s^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$$

對應的母體變異數 (population variance) 以 $\sigma^2$ 表示之.

**註 1.** $s^2$ 爲所有觀測值 $(y_i)$ 與它們所組成的樣本的期望值 $(\bar{y})$ 間的平方偏差值 (squared deviations) 的 "幾乎" 平均值 ("almost" average). (此乃因爲除以 $n-1$, 而不是 $n$, 有其理論上的考量, 爲了提供 $\sigma^2$ (母體變異數) "較好" 的估計.)

**註 2.** $s^2$ 的單位爲觀測值 $y_i$ 的單位的平方, 如 $y_i$ 的單位爲 "元", 則 $s^2$ 的單位爲 "元$^2$".

**定義.** 一度量值樣本的標準差 (standard deviation)

$$s \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{s^2} \quad (s^2 \text{ 的正平方根})$$

對應的母體標準差以 $\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sigma^2}$ 表示之.

註 1. $s$ 與觀測值有相同的單位.

註 2. 實際生活中許多資料的分布都為鐘型 (bell-shaped), 如下圖.

亦即, 可由常態曲線 (normal curve) 所近似. 透過常態曲線的性質, 這些資料 (bell-shaped) 會有明確的分散特性, 如下述.

## 經驗法則 (Empirical Rule) 或稱 68-95-99.7 法則:

若一組度量值的分布近似於常態 (bell-shaped), 則

**(1)** 端點為 $\mu \pm \sigma$ 的區間會涵蓋約 68% 的度量值.

**(2)** 端點為 $\mu \pm 2\sigma$ 的區間會涵蓋約 95% 的度量值.

**(3)** 端點為 $\mu \pm 3\sigma$ 的區間會涵蓋約 99.7% 的度量值.

圖示如下.

例. 某測驗成績的分布近似於 $\mu = 64$ 且 $\sigma = 10$ 的常態分布, 則

- 68% 的分數介於 54 與 74 之間
- 95% 的分數介於 44 與 84 之間
- 幾乎全部 (99.7%) 的分數介於 34 與 94 之間

故, 任選一學生, 其成績介於 54 與 74 間的機率爲 0.68.

## 四. 如何推論? (How Inferences Are Made?)

透過直觀的推論心智過程找出推論的機制 (mechanism): 設任意 (隨機) 選出 20 位選民並問是否支持候選人甲. 若抽樣結果爲此 20 位均支持候選人甲, 則自然 (直觀) 的推論:

候選人甲當選

問. 如何做出這樣的結論?

**(1)** 是因爲樣本 (20 位) 的支持率就等於母體 (全體選民) 的支持率? 不對, 如擲公平銅板 20 次, 理論上出現正面的頻率爲 0.5, 但抽樣結果可能爲 $12/20 = 0.6$ 或 $8/20 = 0.4$ 或其它所有介於 0 與 1 之間的數.

**(2)** 是因爲若候選人甲的支持率小於 50% 時, 則不會出現 20 位抽出者均支持的現象? 不對, 不是不會 (impossible) 發生, 而是高度不可能 (highly improbable). 此種高度不可能 (機率) 乃是隱藏的推論機制 (mechanism).

因此, 機率是推論的機制.

註 1. 機率學家與統計學家之間的差異 (根據處理問題的不同):

機率學家: 假設知道母體的結構, 透過機率論, 計算出獲得某一特別樣本的機率. 如, 假設知道隨機抽出 5 張

牌所形成的母體的結構, 計算出抽出 3 張 A 與 2 張 K 的機率. 簡言之,

$$\boxed{\text{母體結構已知}} \overset{\text{機率論}}{\Rightarrow} \boxed{\text{獲得特別樣本的機率}}$$

**統計學家:** 透過機率論, 計算出觀察到樣本的機率, 對母體做出推論 (剛好相反的過程: 由樣本到母體). 如, 觀察到 5 張 A (樣本), 在正常的一疊牌時發生的機率爲 0, 故此疊牌 (母體) 有問題. 簡言之,

$$\boxed{\text{母體結構未知}} \overset{\text{統計學}}{\Leftarrow} \boxed{\text{觀察到的樣本}}$$

## 五. 理論與現實 (Theory and Reality)

**(1)** 理論乃現實現象的一種猜測 (或近似, 或模型), 雖然無法完全吻合, 但有其必要性, 並儘可能忠實地反應現實.

**(2)** 機率與統計系列課程: 探討統計的理論以及現實的模型, 以致能獲得並運用現實生活中的資訊.

**(3)** 模型的好壞 (實用性) 乃根據是否有助於了解自然現象以及解決實際問題而定.