單元 22: 機率母函數
(課本 §3.10)

求整數值隨機變數的機率分布及其他性質的一有用工具爲機率母函數 (probability-generating function, 簡稱 pgf), 定義如下:

定義 1. 設 Y 爲一整數值隨機變數, 其 pmf 如下:

$$P(Y=i)=p_i,\ i=0,1,2,\ldots$$

則 Y 的機率母函數 (pgf)

$$\begin{aligned} P(t) &\overset{\text{def}}{=} E(t^Y) \\ &= p_0+p_1t+p_2t^2+p_3t^3+\cdots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} p_i t^i \end{aligned}$$

當 $P(t)$ 有限時.

註. 因爲 $P(t)$ 的展開式中, t^i 的係數爲

$$p_i = P(Y=i)$$

故稱 $P(t)$ 爲機率母函數.

定義 2. 隨機變數 Y 的 k 階階乘動差 (kth factorial moment)

$$\mu_{[k]} \overset{\text{def}}{=} E[Y(Y-1)(Y-2)\cdots(Y-k+1)]$$

其中 $k = 1, 2, 3, \ldots$

註. 根據階乘動差的定義, 一階階乘動差

$$\mu_{[1]} = E(Y) = \mu$$

剛好爲 Y 的期望值, 且二階階乘動差

$$\mu_{[2]} = E[Y(Y-1)]$$

是一個用於求二項, 幾何與卜松隨機變數的變異數的式子.

定理 3.13. 設整數值隨機變數 Y 的 pgf 爲 $P(t)$, 則

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d^k P(t)}{dt^k}\right|_{t=1} &= P^{(k)}(1) \\
&= \mu_{[k]} \\
&= E[Y(Y-1)\cdots(Y-k+1)]
\end{aligned}$$

<證> 首先根據機率母函數的定義,

$$P(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + \cdots + p_k t^k + \cdots$$

接著根據一個事實: 當 $P(t)$ 存在時, 微分與和可交換, 得

$$\begin{aligned}
P^{(1)}(t) &= p_1 + 2p_2 t + 3p_3 t^2 + \cdots + \\
&\quad kp_k t^{k-1} + \cdots \\
P^{(2)}(t) &= (2)(1)p_2 + (3)(2)p_3 t + \cdots + \\
&\quad (k)(k-1)p_k t^{k-2} + \cdots \\
&\vdots \\
P^{(k)}(t) &= k(k-1)\cdots(2)(1)p_k + \\
&\quad (k+1)(k)\cdots(2)p_{k+1} t + \cdots \\
&= \sum_{y=k}^{\infty} y(y-1)(y-2)\cdots(y-k+1)\cdot \\
&\quad p_y t^{y-k} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

最後, 代入 $t=1$, 得

$$\begin{aligned}
P^{(1)}(1) &= p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \cdots + kp_k + \cdots \\
&= E(Y) = \mu_{[1]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P^{(2)}(1) &= (2)(1)p_2 + (3)(2)p_3 + \cdots + \\
&\quad (k)(k-1)p_k + \cdots \\
&= E[Y(Y-1)] = \mu_{[2]}
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} P^{(k)}(1) &= \sum_{y=k}^{\infty} y(y-1)\cdots(y-k+1)p_y \\ &= E[Y(Y-1)\cdots(Y-k+1)] \\ &= \mu_{[k]} \end{aligned}$$

例 1. 試求 $Y \sim \text{geometric}(p)$ 的機率母函數 (pgf) $P(t)$.

<解> 根據 pgf 的定義以及隨機變數的函數的期望值公式,

$$\begin{aligned} P(t) &= E(t^Y) \\ &= \sum_{y=1}^{\infty} t^y p(y), \text{ (因為 } p(0)=0) \\ &= \sum_{y=1}^{\infty} t^y q^{y-1} p \\ &= \frac{p}{q} \sum_{y=1}^{\infty} (qt)^y \\ &= \frac{p}{q} \cdot \frac{qt}{1-qt} \quad \text{(因為等比級數)} \\ &= \frac{pt}{1-qt} \end{aligned}$$

當 $|qt| < 1$, 亦相當於 $-1/q < t < 1/q$ 時.

例 2. 試以 $Y \sim \text{geometric}(p)$ 的 pgf $P(t)$ 求其期望值 μ 與變異數 σ^2.

<解> 根據一階階乘動差的定義以及定理 3.13,

$$\begin{aligned}
\mu &= E(Y) = \mu_{[1]} \\
&= P^{(1)}(1) \\
&= \frac{d}{dt}\left[\frac{pt}{1-qt}\right]\bigg|_{t=1} \\
&= \frac{p(1-qt)-(-q)pt}{(1-qt)^2}\bigg|_{t=1} \\
&= \frac{p}{(1-qt)^2}\bigg|_{t=1} \\
&= \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
E(Y(Y-1)) &= \mu_{[2]} \\
&= \frac{d}{dt}\left[\frac{p}{(1-qt)^2}\right]\bigg|_{t=1} \\
&= \frac{2pq}{(1-qt)^3}\bigg|_{t=1} \\
&= \frac{2pq}{(1-q)^3} = \frac{2pq}{p^3} = \frac{2q}{p^2}
\end{aligned}$$

故,

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= E[Y(Y-1)] + E(Y) \\ &= \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{1+q}{p^2} \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= E(Y^2) - [E(Y)]^2 \\ &= \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} \\ &= \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} \end{aligned}$$