

單元 5: 計算一事件的機率: 樣本點法 (課本 §2.5)

求離散樣本空間上一事件的機率的方法可分為

- (1) 樣本點法 (sample-point method)
- (2) 事件組合法 (event-composition method)

樣本點法的步驟 (前置作業為定義實驗及其對應的樣本空間, 以及指定適當的機率值):

- (1) 定義欲求其機率的事件 A 為一群 "特定樣本點" 的集合 (亦即, 一樣本點在事件 A 中, 若此樣本點發生時, 會導致 A 發生).
- (2) 事件 A 發生的機率

$$P(A) = A \text{ 中所有樣本點的機率和}$$

(因為構成 A 的所有樣本點為互斥簡單事件).

例 1. 設由 5 位某工作的申請者中, 任選 2 位雇用之. 他們的勝任能力分別以 1 (最好) 到 5 (最差) 表示之, 且對雇主而言是未知的. 定義 $A =$ 選中最好與 2 個最差當中的一個 (亦即, 選中申請者 "1 與 4" 或 "1 與 5"), $B =$ 至少選中兩個最好中的一個. 試求 $P(A)$ 與 $P(B)$.

<解> 前置作業如下:

實驗: 由 5 位申請者中, 任選 2 位.

樣本空間: 共有 10 個簡單事件, 分別為

$$\begin{aligned} E_1 &= \{1, 2\}, & E_2 &= \{1, 3\}, & E_3 &= \{1, 4\}, \\ E_4 &= \{1, 5\}, & E_5 &= \{2, 3\}, & E_6 &= \{2, 4\}, \\ E_7 &= \{2, 5\}, & E_8 &= \{3, 4\}, & E_9 &= \{3, 5\}, \\ E_{10} &= \{4, 5\} \end{aligned}$$

指定機率值: 因為任選, 每一對被選中的可能性都一樣, 故合理的指定為

$$P(E_i) = \frac{1}{10}, \quad i = 1, 2, \dots, 10$$

接著根據樣本點法的步驟, 得

$$(1) \quad A = E_3 \cup E_4;$$

$$B = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5 \cup E_6 \cup E_7$$

(2) 對應的機率為 $P(A) = P(E_3) + P(E_4) = \frac{2}{10}$

$$\text{以及 } P(B) = \sum_{i=1}^7 P(E_i) = \frac{7}{10}$$

例 2. 投擲一公正銅板三次. 試求

$$P(\text{剛好出現 2 次正面})$$

<解> 前置作業如下:

實驗: 觀察由字母 "正" 與 "反" 構成的三字母字串.

樣本空間: 共有 8 個樣本點 (簡單事件), 分別為

$$E_1 : HHH, E_2 : HHT, E_3 : HTH, E_4 : THH \\ E_5 : HTT, E_6 : THT, E_7 : TTH, E_8 : TTT$$

指定機率值: 因為是公正的銅板, 所有簡單事件均相等可能地 (equally likely) 發生, 故合理的指定為

$$P(E_i) = \frac{1}{8}, i = 1, 2, \dots, 8$$

接著根據樣本點法的步驟, 令 $A =$ 剛好出現 2 次正面的事件, 得

$$(1) A = \{E_2, E_3, E_4\} \stackrel{\text{或}}{=} E_2 \cup E_3 \cup E_4$$

$$(2) P(A) = \sum_{i=2}^4 P(E_i) = \frac{3}{8}$$

例 3. 設 A 與 B 比賽網球時, A 贏的勝算 (odds) 爲 2 比 1. 若比賽兩場, 試求

$$P(A \text{ 至少贏一場})$$

<解> 先處理前置作業:

實驗: 觀察兩場中, 每場的得勝者 (A 或 B), 如 AB 表示 A 贏第一場, B 贏第二場.

樣本空間: 共有 4 個簡單樣本, 分別爲

$$E_1 : AA, E_2 : AB, E_3 : BA, E_4 : BB$$

指定機率值: 因爲 A 有較高的勝算, 給予所有簡單事件同樣的機率是不合適的. 一個合理的指定爲:

$$P(E_1) = \frac{4}{9}, P(E_2) = \frac{2}{9}$$

$$P(E_3) = \frac{2}{9}, P(E_4) = \frac{1}{9}$$

然後根據樣本點法的步驟,

(1) 令事件 $C = A$ 至少贏一場, 則

$$C = E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

(2) 因為構成 C 的簡單事件互斥,

$$\begin{aligned} P(C) &= P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) \\ &= \frac{4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \\ &= \frac{8}{9} \end{aligned}$$

註 1. 常犯的錯誤與困難:

(1) 錯誤地檢視簡單事件的本質.

(2) 無法列出 S 中所有的樣本點.

(3) 樣本空間由大量的樣本點組成, 以致於完整地列出是沉悶, 耗時, 且不可行的.

註 2. 許多樣本空間的樣本點是相同可能的 (equiprobable), 此時只需計數事件中的樣本點個數即可. 若無可用的計數方法, 可透過人工或電腦有順序地列出樣本點.

註 3. 降低工作量及錯誤的工具包含: 規律性, 電腦, 計數的數學理論, 稱作組合分析 (combinatorial analysis). 下一單元會探討一些組合分析的基本結果, 及其在樣本點法上的應用.