# 單元 20: 卜松機率分布
(課本 §3.8)

將一時間區間 (如, 一星期) 分割成 $n$ 個非常小的子區間以致於有如下的假設:

**(1)** $P$(在一子區間內, 無事件 (車禍) 發生) $= 1 - p$

**(2)** $P$(在一子區間內, 剛好一事件發生) $= p$

**(3)** $P$(在一子區間, 超過一個事件發生) $= 0$

**(4)** 區間之間, 事件的發生是相互獨立的.

則, 事件發生的總數

$$\begin{aligned} Y &= n \text{ 個子區間中, 剛好有一事件發生的子區間數} \\ &\sim b(n, p) \end{aligned}$$

另一合理的假設爲 $n \uparrow$ 時 $p \downarrow$. 故可令

$$\lambda = np$$

爲一常數.

因此, 對任一固定的 $y = 0, 1, 2, \ldots,$

$$\begin{aligned}
P(Y = y) &= \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} \\
&= \frac{n(n-1)\ldots(n-y+1)}{y!} \cdot \\
&\qquad \left(\frac{\lambda}{n}\right)^y \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-y} \\
&= \frac{\lambda^y}{y!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-y} \cdot \\
&\qquad \frac{n(n-1)\ldots(n-y+1)}{n^y} \\
&= \frac{\lambda^y}{y!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots \\
&\qquad \left(1-\frac{y-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-y} \\
&\to \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda}, \text{ 當 } n \to \infty
\end{aligned}$$

此乃因爲當 $y$ 固定以及 $\lambda$ 爲常數時,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right) = \cdots \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{y-1}{n}\right) = 1
\end{aligned}$$

且有限項, 亦即 $y$ 項, 相乘積的極限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-y}=1$$

以及根據 L'Hôpital 法則, 所導出的

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}=e^{-\lambda}$$

所致.

**註 1.** 對於 $y=0,1,2,\ldots,$

$$p(y)=e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^y}{y!}$$

確實爲一機率密度函數 (pmf). 因爲

$$\begin{aligned}\sum_{y=0}^{\infty}e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^y}{y!} &= e^{-\lambda}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^y}{y!}\\ &= e^{-\lambda}e^{\lambda}=e^0=1\end{aligned}$$

其中第二個等號成立乃根據自然指數 $e^x$ 的泰勒展開式:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

**註 2.** 稱此隨機變數 $Y$ 的極限有卜松機率分布 (Poisson probability distribution).

**註 3.** 因爲當 $n \to \infty$ 且 $\lambda$ 固定時,

$$\binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} \to e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!}$$

故可以用卜松機率近似二項機率, 當 $n$ 夠大且 $p$ 夠小 (或 $\lambda = np < 7$) 時.

**註 4.** 卜松機率分布是在一段時間內, 空間中, 體積內或任何象度內, 稀有事件發生數的好模型, 如在給定時間區間內的車禍數, 工業意外數, 交換機接收的電話數, 放射性粒子的退化數或一頁打錯的字數, ... 等等均可用卜松機率分布模型化.

正式定義如下:

**定義 1.** $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$ 若且爲若

$$p(y) = P(Y = y) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!}$$

其中 $y = 0, 1, 2, \ldots$ 且 $\lambda > 0$.

**定理 3.11.** 設 $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$. 則

$$\mu = E(Y) = \lambda$$

且

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(Y) = \lambda$$

<證> 根據期望值的定義,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{y=0}^{\infty} y \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda} \\ &= \lambda \sum_{y=1}^{\infty} \frac{\lambda^{y-1}}{(y-1)!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

接著根據如下的變數變換: 令

$$z = y - 1$$

以及

$$\begin{aligned} y = 1 &\Rightarrow z = 0 \\ y = \infty &\Rightarrow z = \infty \end{aligned}$$

可由上式得出

$$E(Y) = \lambda \sum_{z=0}^{\infty} \frac{\lambda^z}{z!} e^{-\lambda}$$

又上式累加符號內的式子剛好是 Poisson($\lambda$) 的 pmf. 故根據 pmf 的定義, 完整的和 (亦即, 從 $z = 0$ 加到 $z = \infty$) 為 1. 因此,

$$E(Y) = \lambda(1) = \lambda$$

當 pmf $p(y)$ 的分母含有 $y!$ 時, 一個求變異數的典型作法是, 先求 $E[Y(Y-1)]$, 再得出 $E(Y^2)$, 最後導出 $\mathrm{Var}(Y)$, 過程如下:

$$\begin{aligned} E[Y(Y-1)] &= \sum_{y=0}^{\infty} y(y-1)\,\frac{\lambda^y}{y!}\,e^{-\lambda} \\ &= \lambda^2 \sum_{y=2}^{\infty} \frac{\lambda^{y-2}}{(y-2)!}\,e^{-\lambda} \end{aligned}$$

接著經由類似的變數變換 $z=y-2$, 可由上式得出

$$E[Y(Y-1)] = \lambda^2 \sum_{z=0}^{\infty} \frac{\lambda^z}{z!} e^{-\lambda}$$

同樣可觀察出上式累加符號內的式子為 Poisson($\lambda$) 的 pmf. 故完整的和為 1. 因而得出,

$$E[Y(Y-1)] = \lambda^2(1) = \lambda^2$$

故

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= E[Y(Y-1)] + E(Y) \\ &= \lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Y) &= E(Y^2) - [E(Y)]^2 \\ &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \\ &= \lambda \end{aligned}$$

例 1. 設某製造業工廠的意外數爲每月平均三次, 若上月發生 6 次, 試問若 $\mu$ 依然仍爲 3, 6 次是否高度的不可能? 或 6 次是否指出 $\mu$ 應該增高?

<解> 因爲每月平均意外數爲 3, 以及按常理言, 意外是屬於稀有事件, 故可假設

$$Y \overset{\text{def}}{=} \text{每月的意外數} \sim \text{Poisson}(3)$$

則

$$\begin{aligned} P(Y \geq 6) &= 1 - \sum_{y=0}^{5} e^{-3} \frac{3^y}{y!} \\ &= 1 - 0.916 \ (\text{查表3}) \\ &= 0.084 \end{aligned}$$

不會很小, 故事件 $(Y = 6)$ 不會是高度不可能. 又

$$\begin{aligned} P(Y = 6) &= P(Y \leq 6) - P(Y \leq 5) \\ &= 0.966 - 0.916 \ (\text{查表3}) \\ &= 0.05 \end{aligned}$$

不會很小, 也與上述結論相符.

若由經驗法則, 根據

$$\mu = \lambda = 3$$

且

$$\sigma^2 = \lambda = 3$$

以及

$$\sigma = \sqrt{3} = 1.73$$

可得出

$$\begin{aligned} & P(Y \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]) \\ = \ & P(Y \in [-0.46, 6.46]) \\ = \ & P(Y \in [0, 6.46]) \\ \approx \ & 0.95 \end{aligned}$$

一個極高的值, 然而 $(Y = 6)$ 落在邊界附近, 所以不會是高度不可能, 但卻是充分地不可能保證 $\mu = 3$ (因爲 $Y = 6$ 確實比 3 高出了近 2 個標準差, 有點高, 以致於無法確保 $\mu = 3$).