單元 36: 獨立隨機變數
(課本 §5.4)

定義. 二隨機變數 Y_1, Y_2 相互獨立 (mutually independent) 若且爲若對任意的 $a < b$, $c < d$,

$$\begin{aligned} & P(a \leq Y_1 \leq b, c \leq Y_2 \leq d) \\ = \; & P(a \leq Y_1 \leq b)P(c \leq Y_2 \leq d) \end{aligned}$$

此定義相當於如下的定義 (以 cdf 的角度來看):

定義. 設

$$(Y_1, Y_2) \sim \text{ joint cdf } F(y_1, y_2)$$

且

$$Y_1 \sim F_1(y_1) \text{ 與 } Y_2 \sim F_2(y_2)$$

則 Y_1 與 Y_2 相互獨立若且爲若對任意的 (y_1, y_2),

$$F(y_1, y_2) = F_1(y_1)F_2(y_2)$$

否則, 稱 Y_1, Y_2 爲不獨立 (dependent).

亦可由 pmf 與 pdf 的角度判斷獨立與否, 如下述的定理.

定理 5.4. 設

$$(Y_1, Y_2) \sim \text{ joint pmf } p(y_1, y_2)$$

且 Y_1 與 Y_2 的 marginal pmf 分別爲 $p_1(y_1)$ 與 $p_2(y_2)$. 則 Y_1 與 Y_2 相互獨立若且爲若對任意的 (y_1, y_2),

$$p(y_1, y_2) = p_1(y_1)p_2(y_2)$$

設

$$(Y_1, Y_2) \sim \text{ joint pdf } f(y_1, y_2)$$

且 Y_1 與 Y_2 的 marginal pdf 分別爲 $f_1(y_1)$ 與 $f_2(y_2)$. 則 Y_1 與 Y_2 相互獨立若且爲若對任意的 (y_1, y_2),

$$f(y_1, y_2) = f_1(y_1)f_2(y_2)$$

例 1. 承接 §5.3 中委員會的例子, 其中 joint pmf $p(y_1, y_2)$ 如下:

	y_1			
y_2	0	1	2	Total
0	0	3/15	3/15	6/15
1	2/15	6/15	0	8/15
2	1/15	0	0	1/15
Total	3/15	9/15	3/15	

因為

$$p(0,0) = 0$$

且

$$p_1(0) = 3/15,\ p_2(0) = 6/15$$

所以

$$p(0,0) \neq p_1(0)p_2(0)$$

而得 Y_1 與 Y_2 不相互獨立.

例 2. 設 Y_1 與 Y_2 的 joint pdf

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 6y_1y_2^2, & 0 \le y_1 \le 1, 0 \le y_2 \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

試證 Y_1 與 Y_2 相互獨立.

<證> 首先, 可觀察出 joint pdf $f(y_1, y_2)$ 在區域

$$R : \begin{cases} 0 \le y_1 \le 1 \\ 0 \le y_2 \le 1 \end{cases}$$

上取值 $6y_1y_2^2$, 其它地方取值 0, 如圖所示.

接著可根據上述的觀察以及 marginal pdf 定義, 分別求出 Y_1 與 Y_2 的 marginal pdf, 並以定理 5.4 所述

的 pdf 角度判斷出獨立性. 對於 $0 \le y_1 \le 1$,

$$\begin{aligned} f_1(y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_2 \\ &= \int_0^1 6y_1 y_2^2 dy_2 \\ &= 6y_1 \cdot \frac{1}{3} y_2^3 \Big|_{y_2=0}^{1} = 2y_1 \end{aligned}$$

當 $y_1 < 0$ 或 $y_1 > 1$ 時,

$$f_1(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_2 = \int_{-\infty}^{\infty} 0 dy_2 = 0$$

因此, 綜合上述, Y_1 的 marginal pdf

$$f_1(y_1) = \begin{cases} 2y_1, & 0 \le y_1 \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{1}$$

同理, 對於 $0 \le y_2 \le 1$,

$$\begin{aligned} f_2(y_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_1 \\ &= \int_0^1 6y_1 y_2^2 dy_1 \\ &= y_2^2 \cdot 3y_1^2 \Big|_{y_1=0}^{1} = 3y_2^2 \end{aligned}$$

對於 $y_2 < 0$ 或 $y_2 > 1$,

$$f_2(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_1 = \int_{-\infty}^{\infty} 0 dy_1 = 0$$

所以, 合併上二式, 得 Y_2 的 marginal pdf

$$f_2(y_2) = \begin{cases} 3y_2^2, & 0 \le y_2 \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{2}$$

最後, 由 (1) 式及 (2) 式, 得

$$\begin{aligned} & f_1(y_1)f_2(y_2) \\ = & \begin{cases} (2y_1)(3y_2^2) = 6y_1y_2^2, & 0 \le y_1 \le 1, \\ & 0 \le y_2 \le 1 \\ (2y_1)(0) \text{ 或 } (0)(3y_2^2) & \\ \quad \text{或 } (0)(0) = 0, & \text{其它} \end{cases} \\ = & \ f(y_1, y_2) \end{aligned}$$

故, Y_1 與 Y_2 相互獨立.

例 3. 設 (Y_1, Y_2) 的 joint pdf

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 2, & 0 \le y_2 \le y_1 \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

試證 Y_1 與 Y_2 不獨立.

<證> 因爲 joint pdf $f(y_1, y_2)$ 僅在區域

$$R : \begin{cases} 0 \le y_1 \le 1 \\ 0 \le y_2 \le y_1 \end{cases}$$

上爲正且取值爲 2, 如圖示, 故對於 $0 \le y_1 \le 1$,

$$\begin{aligned} f_1(y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_2 \\ &= \int_0^{y_1} 2 dy_2 \\ &= 2y_2 \Big|_{y_2=0}^{y_1} = 2y_1 \end{aligned}$$

又當 $y_1 < 0$ 或 $y_1 > 1$ 時,

$$f_1(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_2 = \int_{-\infty}^{\infty} 0 dy_2 = 0$$

因此, 合併上述二式, 得 Y_1 的 marginal pdf

$$f_1(y_1) = \begin{cases} 2y_1, & 0 \le y_1 \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{3}$$

同理, 因爲區域 R 亦可以水平方式表示成

$$R : \begin{cases} 0 \le y_2 \le 1 \\ y_2 \le y_1 \le 1 \end{cases}$$

如圖示, 故對於 $0 \le y_2 \le 1$,

$$\begin{aligned} f_2(y_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_1 \\ &= \int_{y_2}^{1} 2 dy_1 \\ &= 2y_1 \Big|_{y_1=y_2}^{1} = 2(1 - y_2) \end{aligned}$$

又對於 $y_2 < 0$ 或 $y_2 > 1$,

$$f_2(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_1 = \int_{-\infty}^{\infty} 0 dy_1 = 0$$

所以, Y_2 的 marginal pdf

$$f_2(y_2) = \begin{cases} 2(1-y_2), & 0 \le y_2 \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \qquad (4)$$

接著, 當 $0 < y_1 \le y_2 < 1$ 時, 亦即, 在區域

$$R_1 : \begin{cases} 0 < y_1 < 1 \\ y_1 \le y_2 < 1 \end{cases}$$

上, 如圖示, 由 (3) 式與 (4) 式, 可得

$$f_1(y_1)f_2(y_2) = (2y_1)(2(1-y_2)) \neq 0$$

然而在同樣的區域 R_1 上, 卻得出

$$f(y_1, y_2) = 0$$

故, Y_1 與 Y_2 不獨立.

註. (1) 在例 3 中, 求 $f_1(y_1)$ 時, y_2 的積分極限與 y_1 有關; 求 $f_2(y_2)$ 時, y_1 的積分極限與 y_2 有關, 這是導致不獨立的原因.

(2) 例 2 中, 求 $f_1(y_1)$ 與 $f_2(y_2)$ 時, 積分極限均爲常數, 而不受 y_1 與 y_2 的影響, 故相互獨立.

定理 5.5. 設 (Y_1, Y_2) 的 joint pdf $f(y_1, y_2)$ 僅在區域

$$R: \begin{cases} a \le y_1 \le b \\ c \le y_2 \le d \end{cases}$$

上取正值, 其中 a, b, c, d 均爲常數, 且在其它地方的取值爲 0. 則 Y_1 與 Y_2 相互獨立若且爲若

$$f(y_1, y_2) = g(y_1)h(y_2)$$

其中 $g(y_1)$ 僅爲 y_1 的非負函數, $h(y_2)$ 僅爲 y_2 的非負函數.

<證> 略.

註. 定理 5.5 的優點: 不需要求出 marginal pdf, 只要能將 $f(y_1, y_2)$ 分解成一個純 y_1 的函數 (不單在數學式子上, 亦包括了定義域) 與一個純 y_2 的函數的乘積即可, 甚至此二函數亦不需要爲 pdf.

例 4. 設 (Y_1, Y_2) 的 joint pdf

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 2y_1, & 0 \le y_1 \le 1, 0 \le y_2 \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

試證 Y_1 與 Y_2 相互獨立.

<證> 因爲 $f(y_1,y_2)$ 僅在區域

$$R:\begin{cases}0\le y_1\le 1\\ 0\le y_2\le 1\end{cases}$$

上爲正 (R 的邊界爲常數) 且令

$$g(y_1)=\begin{cases}y_1, & 0\le y_1\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

與

$$h(y_2)=\begin{cases}2, & 0\le y_2\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

可得

$$\begin{aligned}&g(y_1)h(y_2)\\ =&\begin{cases}(y_1)(2)=2y_1, & 0\le y_1\le 1,\\ & 0\le y_2\le 1\\ (y_1)(0)\text{ 或 }(0)(2) & \\ \text{或 }(0)(0)=0, & \text{其它}\end{cases}\\ =&\ f(y_1,y_2)\end{aligned}$$

因此, 由定理 5.5, Y_1 與 Y_2 相互獨立, 雖然 $g(y_1)$ 與 $h(y_2)$ 均不是 pdf.

例 5. 設 (Y_1,Y_2) 的 joint pdf

$$f(y_1,y_2)=\begin{cases}3y_1, & 0\le y_2\le y_1\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

試證 Y_1 與 Y_2 不相互獨立.

<證> 因爲 $f(y_1, y_2)$ 僅在區域

$$R : \begin{cases} 0 \le y_1 \le 1 \\ 0 \le y_2 \le y_1 \end{cases}$$

上爲正, 但 R 的邊界不爲常數, 亦即, 不存在常數 a, b, c, d 使得 $f(y_1, y_2)$ 在邊界爲常數的方形區域

$$R : \begin{cases} a \le y_1 \le b \\ c \le y_2 \le d \end{cases}$$

上爲正, 不符合定理 5.5 的條件, 故不能用定理 5.5 來判斷是否獨立, 隨然 $f(y_1, y_2)$ 在數學式子上與前例的情況一樣, 均爲 (一常數)·(一變數). 因此, 需要根據定理 5.4 以 pdf 的角度來處理.

首先, 對於 $0 \le y_1 \le 1$,

$$\begin{aligned} f_1(y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_2 \\ &= \int_0^{y_1} 3y_1 dy_2 \\ &= 3y_1 y_2 \Big|_{y_2=0}^{y_1} = 3y_1^2 \end{aligned}$$

同時對於 $y_1 < 0$ 或 $y_1 > 1$,

$$f_1(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} 0 dy_2 = 0$$

因此, Y_1 的 marginal pdf

$$f_1(y_1) = \begin{cases} 3y_1^2, & 0 \le y_1 \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{5}$$

同理, 因爲區域 R 亦可以水平方式表示成

$$R : \begin{cases} 0 \le y_2 \le 1 \\ y_2 \le y_1 \le 1 \end{cases}$$

如圖示, 故對於 $0 \le y_2 \le 1$,

$$\begin{aligned} f_2(y_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_1 \\ &= \int_{y_2}^{1} 3y_1 dy_1 \\ &= \frac{3}{2} y_1^2 \Big|_{y_1=y_2}^{1} = \frac{3}{2}(1 - y_2^2) \end{aligned}$$

又對於 $y_2 < 0$ 或 $y_2 > 1$,

$$f_2(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} 0 dy_1 = 0$$

所以, Y_2 的 marginal pdf

$$f_2(y_2) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1 - y_2^2), & 0 \le y_2 \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{6}$$

最後, 當 $0 < y_1 \le y_2 < 1$, 亦即, 在區域

$$R_1 : \begin{cases} 0 < y_1 < 1 \\ y_1 \le y_2 < 1 \end{cases}$$

上, 如圖示, 由 (5) 式及 (6) 式, 可得

$$f_1(y_1)f_2(y_2) = (3y_1^2)\left(\frac{3}{2}(1-y_2^2)\right) \neq 0$$

但在同樣的區域 R_1 上, 卻得出

$$f(y_1, y_2) = 0$$

故, Y_1 與 Y_2 不相互獨立.

註. 推廣: 設

$$Y_1 \sim F_1(y_1),\ Y_2 \sim F_2(y_2),\ \ldots,\ Y_n \sim F_n(y_n)$$

且

$$(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \sim F(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

則

$$Y_1,\ Y_2,\ \ldots,\ Y_n$$

相互獨立若且爲若對所有的 $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$,

$$F(y_1, y_2, \ldots, y_n) = F_1(y_1)F_2(y_2)\cdots F_n(y_n)$$

亦即, joint cdf 等於各自 cdf 的乘積; 亦相當於對於所有的 $(y_1, y_2, \ldots, y_2)$,

$$p(y_1, y_2, \ldots, y_n) = p_1(y_1)p_2(y_2)\cdots p_n(y_n)$$

(離散情況) 亦即, joint pmf 等於各自 pmf 的乘積;
或對所有的 $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$,

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = f_1(y_1) f_2(y_2) \cdots f_n(y_n)$$

(連續情況), 亦即, joint pdf 等於各自 pdf 的乘積.