單元 52: 與常態分布相關的抽樣分布 (課本 §7.2)

定理 7.1. 若隨機樣本

$$Y_1, \ldots, Y_n \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma)$$

則統計量 (樣本期望值)

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \sim N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$$

<證> 因爲

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}Y_1 + \frac{1}{n}Y_2 + \cdots + \frac{1}{n}Y_n$$

是獨立常態隨機變數的線性組合, 故 $\overline{Y}$ 是常態分布. 又

$$E(\overline{Y}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\mu = \frac{1}{n}(n\mu) = \mu$$

且

$$\text{Var}\overline{Y} = \sum_{\text{i}=1}^{\text{n}} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma^2 = \frac{1}{n^2}(\text{n}\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$$

因此,

$$\overline{Y} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

得證.

註. 標準化 (常態化, normalizing), 得

$$\sqrt{n}\left(\frac{\overline{Y}-\mu}{\sigma}\right)=\frac{\overline{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

例 1. 設一裝瓶機被設定成每瓶的平均注入量爲 μ 盎司且標準差 σ 爲 1 盎司的常態分布. 今隨機選取裝好的 9 瓶, 其容量分別爲 $y_1,\ldots,y_9$, 並令樣本期望值

$$\overline{y}=\frac{1}{9}(y_1+\cdots+y_9)$$

(a) 試求樣本期望值與眞實期望值 μ 的差在 0.3 盎司內的機率.

(b) 試問需取多大的樣本以致於誤差在 0.3 盎司內的機率爲 0.95?

<解答> 首先,

$$\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i\sim N\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

故 (a) 當 $n = 9$ 且 $\sigma = 1$ 並根據 Z 的對稱性,

$$
\begin{aligned}
&P(|\overline{Y} - \mu| \le 0.3) \\
&\quad = \; P(-0.3 \le \overline{Y} - \mu \le 0.3) \\
&\quad = \; P\left(-\frac{0.3}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{\overline{Y} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{0.3}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\
&\quad = \; P(-0.9 \le Z \le 0.9) \\
&\quad = \; 1 - 2P(Z > 0.9) \\
&\quad = \; 1 - 2(0.1841) = 0.6318
\end{aligned}
$$

經由查表而得, 或由

$$\mathsf{R} : 1 - 2 * \texttt{pnorm}(-0.9)$$

因爲

$$\mathsf{R} : \texttt{pnorm}(\texttt{y}_0) = \texttt{P}(\texttt{Z} \le \texttt{y}_0)$$

計算 Z 的 cdf.

(b) 當 $\sigma = 1$, 求 n 使得

$$
\begin{aligned}
&P(|\overline{Y} - \mu| \le 0.3) \\
&\quad = \; P\left(-0.3\sqrt{n} \le \sqrt{n}\left(\frac{\overline{Y} - \mu}{\sigma}\right) \le 0.3\sqrt{n}\right) \\
&\quad = \; P(-0.3\sqrt{n} \le Z \le 0.3\sqrt{n}) = 0.95 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

由表 4, 得

$$P(Z > 1.96) = 0.025$$

故根據 Z 的對稱性,

$$\begin{aligned} P(-1.96 \le Z \le 1.96) &= 1 - 2P(Z > 1.96) \\ &= 1 - 2(0.025) \\ &= 0.95 \end{aligned} \tag{2}$$

合併 (1) 式與 (2) 式, 得

$$0.3\sqrt{n} = 1.96$$

因此,

$$n = \left(\frac{1.96}{0.3}\right)^2 = 42.68$$

且取 $n = 43$ 得

$$P(|\overline{Y} - \mu| \le 0.3) \ge 0.95$$

略超過. 或

$$\begin{aligned} \mathsf{R}: 0.3\sqrt{n} &= \texttt{qnorm}(0.975) \\ n &= (\texttt{qnorm}(0.975)/0.3)\texttt{\^{}}2 \end{aligned}$$

因爲 p-th quantile

$$\phi_p = \texttt{qnorm(p)}$$

意即

$$P(Z \le \phi_p) = p$$

計算 inverse cdf 的值, 如圖示.

定理 7.2. 若隨機樣本

$$Y_1, \ldots, Y_n \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma)$$

則

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{Y_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$$

稱作自由度爲 n 的卡方分布.

<證> 因爲對於 $i = 1, \cdots, n$,

$$\left(\frac{Y_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$$

且相互獨立, 故得證.

註. 由表 6, 得

$$P(\chi^2(n) \geq \chi^2_\alpha) = \alpha$$

如圖示. 如, $n = 10$,

$$P(\chi^2(10) > 4.86518) = 0.90$$

或由

$$\text{R}: \texttt{pchisq}(\texttt{y}_0, \texttt{n}) = P(\chi^2(n) \leq y_0) \overset{\text{記作}}{=} p$$

計算 $\chi^2(n)$ 的 cdf, 即給定 y_0, 求 p.

另 p-th quantile

$$\phi_p = \texttt{qchisq(p,n)}$$

如圖示, 即

$$P(\chi^2(n) \leq \phi_p) = p$$

計算 inverse cdf 的值, 即給定 p, 求 ϕ_p.

例 2. 令

$$Z_1, \ldots, Z_6 \overset{\text{iid}}{\sim} N(0,1)$$

試求 b 使得

$$P\left(\sum_{i=1}^{6} Z_i^2 \leq b\right) = 0.95$$

<解> 首先, 根據定理 7.2 及題意

$$\sum_{i=1}^{6} Z_i^2 \sim \chi^2(6)$$

故

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{6} Z_i^2 \leq b\right) &= P(\chi^2(6) \leq b) \\ &= 0.95 \end{aligned}$$

乃相當於

$$P(\chi^2(6) > b) = 1 - 0.95 = 0.05$$

由表 6, 得

$$P(\chi^2(6) > 12.5916) = 0.05$$

所以, $b = 12.5916$. 或

$$\mathsf{R} : b = \texttt{qchisq}(0.95, 6)$$

定義. 樣本變異數

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2$$

可作為母體變異數 σ^2 的一個好估計 (詳述於第 8 章).

定理 7.3 若隨機樣本

$$Y_1, \ldots, Y_n \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma)$$

則

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

且 $\overline{Y}$ 與 S^2 相互獨立.

註. 由定理 7.2,

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$$

但

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2 \sim \chi^2(n-1)$$

自由度少 1, 因為 μ 被已知的 $\overline{Y}$ 取代.

<證> 僅考慮 $n=2$ 的情況. (一般的情況, 見練習題 13.93.)

(i) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$: 當 $n=2$,

$$\overline{Y}=\frac{1}{2}(Y_1+Y_2)$$

且

$$\begin{aligned}
S^2 &= \frac{1}{2-1}\sum_{i=1}^{2}(Y_i-\overline{Y})^2 \\
&= \left[Y_1-\frac{1}{2}(Y_1+Y_2)\right]^2+\left[Y_2-\frac{1}{2}(Y_1+Y_2)\right]^2 \\
&= \left[\frac{1}{2}(Y_1-Y_2)\right]^2+\left[\frac{1}{2}(Y_2-Y_1)\right]^2 \\
&= 2\left[\frac{1}{2}(Y_1-Y_2)\right]^2=\frac{(Y_1-Y_2)^2}{2} \qquad (3)
\end{aligned}$$

又

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{S^2}{\sigma^2} = \frac{(Y_1-Y_2)^2}{2\sigma^2}$$
$$= \left(\frac{Y_1-Y_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 \tag{4}$$

因爲

$$Y_1, Y_2 \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma)$$

故

$$Y_1 - Y_2 \sim N(0, \sqrt{2}\sigma)$$

因此

$$\frac{Y_1-Y_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0,1) \tag{5}$$

且由 (4) 與 (5) 式,

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \left(\frac{Y_1-Y_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$$

得證.

(ii) $\overline{Y}$ 與 S^2 相互獨立: 由單元 49, 例 1 知,

$$U_1 = Y_1 + Y_2$$

與

$$U_2 = Y_1 - Y_2$$

相互獨立. 又

$$\overline{Y} = \frac{Y_1 + Y_2}{2} = \frac{U_1}{2}$$

且由 (3) 式

$$S^2 = \frac{(Y_1 - Y_2)^2}{2} = \frac{U_2^2}{2}$$

分別僅爲二相互獨立的 U_1 與 U_2 中的一個函數, 故

$$\overline{Y} \text{ 與 } S^2$$

相互獨立.

例 3. 續例 1 的裝瓶機問題. 今隨機選取 10 瓶, 並計算 S^2. 試求 b_1 與 b_2 使得

$$P(b_1 \leq S^2 \leq b_2) = 0.90$$

<解> 首先, b_1 與 b_2 需滿足

$$\begin{aligned} & P(b_1 \leq S^2 \leq b_2) \\ = \ & P\left(\frac{(n-1)b_1}{\sigma^2} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \frac{(n-1)b_2}{\sigma^2}\right) \\ = \ & P\left(\frac{(n-1)b_1}{\sigma^2} \leq \chi^2(n-1) \leq \frac{(n-1)b_2}{\sigma^2}\right) \\ = \ & 0.90 \end{aligned}$$

又由表 6, 當 $n = 10$, 得

$$\chi^2_{0.95} = 3.32511 \quad \text{與} \quad \chi^2_{0.05} = 16.9196$$

如圖示. 故, 當 $\sigma = 1$, 得

$$b_1 = \frac{3.3251}{9} \approx 0.369$$

且

$$b_2 = \frac{16.9196}{9} \approx 1.880$$

或

$$\mathsf{R} : b_1 = \texttt{qchisq}(0.05, 9)/9$$

與

$$b_2 = \texttt{qchisq}(0.95, 9)/9$$

因此, 區間 $(0.369, 1.880)$ 涵蓋 S^2 的機率爲 0.90, 一相當寬的區間.

定義. 令 $Z \sim N(0,1)$ 且考慮自由度爲 ν 的卡方分布隨機變數 $\chi^2(\nu)$. 若 Z 與 $\chi^2(\nu)$ 相互獨立, 則定義

$$T(\nu) = \frac{Z}{\sqrt{\chi^2(\nu)/\nu}}$$

並稱其分布爲自由度爲 ν 的 t 分布.

註 1. 若

$$Y_1, \ldots, Y_n \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma)$$

則

$$\sqrt{n}\left(\frac{\overline{Y}-\mu}{S}\right) \sim T(n-1)$$

其中

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2$$

<證> 因爲

$$\overline{Y} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

故

$$\sqrt{n}\left(\frac{\overline{Y}-\mu}{\sigma}\right) \sim N(0,1)$$

又由定理 7.3 知,

$$(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

且

$$\sqrt{n}\left(\frac{\overline{Y}-\mu}{\sigma}\right) \text{ 與 } (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}$$

相互獨立, 此乃因爲 $\overline{Y}$ 與 S^2 相互獨立. 因此, 由 t 分布的定義,

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{Y}-\mu)/\sigma}{\sqrt{(n-1)S^2/(\sigma^2(n-1))}} = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{Y}-\mu}{S}\right) \sim T(n-1)$$

註 2. $N(0,1)$ 與 $T(\nu)$ 的比較:

(1) $T(\nu)$ 的 pdf

$$f(t) = \left\{\frac{\Gamma(\nu+1)/2}{\sqrt{\pi\nu\Gamma(\nu/2)}}\right\}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}$$

其中 $-\infty < t < \infty$ (參看練習題 7.98).

(2) 當 $\nu > 1$ 時,

$$E(T) = 0$$

且當 $\nu > 2$ 時,

$$\mathrm{Var}(T) = \frac{\nu}{\nu-2} = 1 + \frac{2}{\nu-2}$$

恆大於 1, 且爲 ν 的遞減函數 (參看練習題 7.30).

(3) 由圖形, $N(0,1)$ 較集中, $T(\nu)$ 有較多的機率質量在尾部 (或稱有肥大的尾部, fat tails).

註 3. 由表 5,

$$P(T(\nu) > t_\alpha) = \alpha$$

如圖示.

註 4. (i) 若 σ 已知, 則採用

$$\sqrt{n}\left(\frac{\overline{Y}-\mu}{\sigma}\right) \sim N(0,1)$$

對 μ 推論.

(ii) 若 σ 未知, 則採用

$$\sqrt{n}\left(\frac{\overline{Y}-\mu}{S}\right) \sim T(n-1)$$

對 μ 推論.

例 4. 若某金屬線的

$$\text{拉張強度 (tensile strength)} \sim N(\mu,\sigma)$$

其中 μ 與 σ 均未知. 隨機選取 6 段金屬線並令 Y_i 爲第 i 段的拉張強度, $i=1,\ldots,6$. 則

$$\mu \approx \overline{Y}, \quad \sigma^2 \approx S^2$$

且

$$\sigma^2_{\overline{Y}} = \frac{\sigma^2}{n} \approx \frac{S^2}{n}$$

試求 $\overline{Y}$ 與眞正母體期望値 μ 的差在 $2\frac{S}{\sqrt{n}}$ 個單位內的機率.

<解> 由題意與註 1, 在 $n=6$ 時, 需求

$$\begin{aligned} & P\left(|\overline{Y}-\mu| \le 2\frac{S}{\sqrt{n}}\right) \\ &\quad = P\left(-2 \le \sqrt{n}\left(\frac{\overline{Y}-\mu}{S}\right) \le 2\right) \\ &\quad = P(-2 \le T(n-1) \le 2) \\ &\quad = P(-2 \le T(5) \le 2) \end{aligned}$$

由表 5, 得

$$P(T(5) > 2.015) = 0.05$$

故

$$\begin{aligned} P(-2.015 \le T(5) \le 2.015) &= 1-2(0.05) \\ &= 0.90 \end{aligned}$$

因此,

$$
\begin{aligned}
P\left(|\overline{Y}-\mu| \le 2\frac{S}{\sqrt{n}}\right) &= P(-2 \le T(5) \le 2) \\
&\le 0.90
\end{aligned}
$$

略小. 或

$$\mathsf{R} : \mathtt{pt}(2,5) - \mathtt{pt}(-2,5)$$

或

$$1 - 2 * \mathtt{pt}(-2,5)$$

註. 若 σ 已知,

$$
\begin{aligned}
& P\left(|\overline{Y}-\mu| \le 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\
&= P\left(-2 \le \sqrt{n}\left(\frac{\overline{Y}-\mu}{\sigma}\right) \le 2\right) \\
&= P(-2 \le Z \le 2) \\
&= 1 - 2P(Z > 2) \\
&= 1 - 2(0.0228) \\
&= 0.9544 > P\left(|\overline{Y}-\mu| \le 2\frac{S}{\sqrt{n}}\right) \\
&= P(-2 \le T(5) \le 2)
\end{aligned}
$$

與註 2 一致, 因爲 Z 較集中.

令

$$X_1, \ldots, X_{n_1} \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu_1, \sigma_1)$$

即由母體 1 所得的隨機樣本, 且

$$Y_1, \ldots, Y_{n_2} \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu_2, \sigma_2)$$

即由母體 2 所得的隨機樣本.

問. 如何比較 σ_1^2 與 σ_2^2?

答. 一個直觀的作法爲, 由 $X_1, \ldots, X_{n_1}$ 得

$$S_1^2 \approx \sigma_1^2$$

且由 $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ 得

$$S_2^2 \approx \sigma_2^2$$

並考慮 S_1^2/S_2^2. 但更好的作法爲考慮

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right)\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\right)$$

即與各自變異數相比後的比值, 且其分布爲自由度爲 $(n_1 - 1)$ 與 $(n_2 - 1)$ 的 F-分布, 並記作

$$\left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right)\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\right) \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

定義. 考慮隨機變數 $\chi_1^2(\nu_1)$ 與 $\chi_2^2(\nu_2)$. 若 $\chi_1^2(\nu_1)$ 與 $\chi_2^2(\nu_2)$ 相互獨立, 則定義

$$F(\nu_1, \nu_2) = \frac{\chi_1^2(\nu_1)/\nu_1}{\chi_2^2(\nu_2)/\nu_2}$$

並稱其分布爲 (分子) 自由度爲 ν_1 且 (分母) 自由度爲 ν_2 的 F-分布.

註 1. 若

$$X_1, \ldots, X_{n_1} \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu_1, \sigma_1)$$

以及

$$Y_1, \ldots, Y_{n_2} \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu_2, \sigma_2)$$

且它們相互獨立, 則

$$(n_1 - 1)S_1^2/\sigma_1^2 \sim \chi_1^2(n_1 - 1)$$

且

$$(n_2 - 1)S_2^2/\sigma_2^2 \sim \chi_2^2(n_2 - 1)$$

以及 S_1^2 與 S_2^2 相互獨立. 故由 F 分布的定義,

$$\begin{aligned}
&\frac{(n_1 - 1)S_1^2/[\sigma_1^2(n_1 - 1)]}{(n_2 - 1)S_2^2/[\sigma_2^2(n_2 - 1)]} \\
&\qquad = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)
\end{aligned}$$

其中 $n_1 - 1$ 稱作分子自由度, $n_2 - 1$ 稱作分母自由度.

註 2. 由表 7,

$$P(F(\nu_1, \nu_2) > F_\alpha) = \alpha$$

如圖示.

例 5. 設由兩個有相同母體變異數的常態母體中, 分別取出大小爲 $n_1 = 6$ 與 $n_2 = 10$ 的隨機樣本. 試求 b 使得

$$P(S_1^2/S_2^2 \le b) = 0.95$$

<解> 因爲

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

故

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(5, 9)$$

又

$$P(S_1^2/S_2^2 \le b) = 0.95$$

相當於

$$P(S_1^2/S_2^2 > b) = 1 - 0.95 = 0.05$$

因此, 由表 7, 得

$$P(F(5,9) > 3.48) = 0.05$$

且 $b = 3.48$. 或

$$\mathsf{R}: b = \mathtt{qf}(0.95, 5, 9)$$