

數理統計一

期中考 (11-10-2011)

- 請列出計算過程, 僅有答案, 錯誤過程, 均不予計分.
- 作弊以零分計, 並按校規處理.

1. 設 $Y_1, \dots, Y_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$. 試求 $\text{Var}(S^2)$. (10分)
2. 設 $Y_1, \dots, Y_5 \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, 1)$ 且 $U = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 Y_i$ 以及 $V = \sum_{i=1}^4 (Y_i - U)^2$. 試求 $\frac{3(4U^2 + Y_5^2)}{2V}$ 的分布. (10分)
3. 設 Y_1, \dots, Y_n 獨立同分布且共同的期望值與變異數分別為 μ 與 σ^2 . 試證 S^2 是 σ^2 的不偏估計量. (10分)
4. 設 $Y_1, \dots, Y_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{unif}(0, \theta)$ 並令 $U = \frac{1}{\theta} Y_{(n)}$. 試求 U 的分布函數並以 U 為樞紐量求 θ 的 90% 下信賴界限. (12分)
5. 設 $Y_1, \dots, Y_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} f(y|\theta) = \begin{cases} \frac{2y}{\theta} e^{-y^2/\theta}, & y > 0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$ 試求 θ 的 MVUE. (12分)
6. 設 $Y_1, \dots, Y_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Poisson}(\lambda)$ 並令 $C = 5Y^2$, $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$. 試求 $E(C)$ 的 MVUE. (12分)
7. 設 $Y_1, \dots, Y_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} f(y|\theta) = \begin{cases} \theta y^{\theta-1}, & 0 < y < 1, \theta > 0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$
 - (a) 試證 \bar{Y} 是 $\frac{\theta}{\theta+1}$ 的一致統計量. (10分)
 - (b) 試證 $-\sum_{i=1}^n \ln Y_i$ 是 θ 的充分統計量. (10分)
 - (c) 試證 $-2\theta \sum_{i=1}^n \ln Y_i \sim \chi^2(2n)$ 與 $E\left(\frac{1}{-2\theta \sum_{i=1}^n \ln Y_i}\right) = \frac{1}{2(n-1)}$ 並求 θ 的 MVUE. (14分)