

## 單元 9: 一個點估計量優良性的計算 (課本 §8.4)

定義. 估計誤差 (error of estimation)

$$\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} |\hat{\theta} - \theta|$$

乃一隨機量.

註 1. 因為  $\epsilon$  會隨機地改變, 故需以機率的方式描述它; 舉例, 若  $\hat{\theta}$  是不偏的且抽樣分布  $f(\hat{\theta})$  如圖示, 則

$$\begin{aligned} P(\epsilon < b) &= P(|\hat{\theta} - \theta| < b) \\ &= P(\theta - b < \hat{\theta} < \theta + b) \\ &= \text{斜線部分的面積} \end{aligned}$$

乃表示在重複抽樣下,  $\hat{\theta}$  在  $\theta$  的  $b$  個單位內的比率. 所以,  $P(\epsilon < b)$  提供一個單一估計值的優良性度量 (measure of goodness), 此處的  $b$  稱作  $\epsilon$  的機率界限 (probabilistic bound).

問. 如何在一給定的高機率下, 如 0.90, 求  $b$ ?

答. (i) 若  $f(\hat{\theta})$  已知, 則可選  $b$  使得

$$\int_{\theta-b}^{\theta+b} f(\hat{\theta}) d\hat{\theta} = 0.90$$

(ii) 根據柴比雪夫不等式 (無論  $f(\hat{\theta})$  已知或未知), 若  $\hat{\theta}$  是不偏的, 則可近似  $b$  如下.

令

$$b = k\sigma_{\hat{\theta}}, \quad k \geq 1$$

且根據  $\hat{\theta}$  的不偏性, 即

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

得

$$\begin{aligned} P(\epsilon < b) &= P(|\hat{\theta} - \theta| < b) \\ &= P(|\hat{\theta} - E(\hat{\theta})| < k\sigma_{\hat{\theta}}) \\ &\geq 1 - \frac{1}{k^2} = 0.90 \end{aligned}$$

由此得,

$$k^2 = 10 \text{ 或 } k = \sqrt{10}$$

因此, 可設定

$$b = \sqrt{10}\sigma_{\hat{\theta}}$$

且得

$$P(\epsilon < b) \geq 0.90$$

一個機率比 0.90 大的界限  $b$ .

註 1. 通常, 取  $k = 2$  並設定  $b = 2\sigma_{\hat{\theta}}$  且得

$$P(\epsilon < b) = P(|\hat{\theta} - \theta| < 2\sigma_{\hat{\theta}}) \geq 1 - \frac{1}{2^2} = 0.75$$

一個相當保守的機率.

註 2. 針對某些常見不偏估計量  $\hat{\theta}$  的分布, 若取

$$b = 2\sigma_{\hat{\theta}}$$

時, 會得到更高的機率, 如

(1)  $\hat{\theta} \sim N(\mu, \sigma^2)$  時,

$$P(\epsilon < 2\sigma_{\hat{\theta}}) = 1 - 2P(Z \geq 2) = 0.9544$$

其中  $Z \sim N(0, 1)$ .

(2)  $\hat{\theta} \sim \text{uniform}(a, b)$  時,

$$P(\epsilon < b) = P(a < \hat{\theta} < b) = 1$$

(3)  $\hat{\theta} \sim \text{exp}(\beta)$  時,

$$P(\epsilon < 2\sigma_{\hat{\theta}}) = P(0 < \hat{\theta} < 3\beta) \approx 0.9502$$

例 1. 設隨機抽出 1000 位選民, 得支持現任縣長的人數  $y = 560$ .

(a) 試估計縣長的支持率  $p$ .

(b) 試求一個估計誤差的二標準差界限.

<解> (a)  $\hat{p} = 0.56$

(b)  $b = 2\sigma_{\hat{p}} \approx 0.03$  且

$$P(|\hat{p} - p| < 0.03) \approx 0.95$$

由此導出, 基於相當高的機率,

$$p > 0.56 - 0.03 = 0.53$$

故, 一個推論是, 有相當高的可信度, 現任縣長會連任.