單元 3: 中央極限定理
(課本 §7.3)

中央極限定理 (The Central Limit Theorem, CLT). 令 $Y_1, \ldots, Y_n$ 獨立同分布且共同的期望值

$$E(Y_i) = \mu,\ i = 1, \ldots, n$$

以及共同的變異數

$$\mathrm{Var}(Y_i) = \sigma^2 < \infty,\ i = 1, \ldots, n$$

定義

$$U_n = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{Y} - \mu}{\sigma}\right)$$

其中 $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$. 則當 $n \to \infty$ 時,

$$U_n \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$$

意即, 對於 $-\infty \le a < b \le \infty$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P(a \le U_n \le b) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-u^2/2}du \\ &= P(a \le Z \le b)\end{aligned}$$

其中 $Z \sim N(0,1)$.

例 6. 設某州所有高中的能力指標測驗爲

$$\mu = 60 \quad 且 \quad \sigma^2 = 64$$

的分布. 設由某一高中隨機選出的 $n = 100$ 個學生的樣本期望值爲 58. 試問是否此高中的比較差?

<解> R: `pnorm(-2.5)` 或

```
pnorm(58, mean=60, sd=0.8)
```

例 7 若收銀台的服務時間爲

$$\mu = 1.5 \text{ 分} \quad 且 \quad \sigma^2 = 1 \text{ 分}^2$$

的獨立隨機變數. 試求在 2 小時內能服務 100 個顧客的機率.

<解> R: `pnorm(-3)` 或

```
pnorm(120, mean=150, sd=10)
```