單元 31: 變異數的假設檢定
(課本 §10.9)

首先, 探討

一. 單一變異數的檢定, 又稱作 χ^2 檢定

設隨機變數

$$Y_1, \ldots, Y_n \overset{\text{def}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$$

其中 μ, σ^2 均未知.

(i) 檢定

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ 對立於 } H_a : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

上尾檢定.

因爲 S^2 是 σ^2 的不偏估計量且由定理 7.3, 當

$$H_0 : \sigma_2 = \sigma_0^2$$

爲眞時,

$$\chi^2 \overset{\text{def}}{=} \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

故得檢定統計量

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

又因爲若 $\sigma^2 \gg \sigma_0^2$, 則 $S^2 \gg \sigma_0^2$, 即 χ^2 相對地大, 而較不支持 H_0, 故拒絕 H_0, 可得拒絕域

$$\text{RR} = \{\chi^2 > k\}, \text{ 某常數 } k$$

明確的 k 爲何? 在意義水準 α 下, 由定義,

$$\begin{aligned}
\alpha &= P(\text{RR 發生, 當 } H_0 \text{ 眞時}) \\
&= P(\chi^2 > k, \text{ 當 } \sigma^2 = \sigma_0^2) \\
&= P(\chi^2(n-1) > k) \qquad (1)
\end{aligned}$$

又令 χ_α^2 滿足

$$P(\chi^2(n-1) > \chi_\alpha^2) = \alpha \qquad (2)$$

故比較 (1) 式與 (2) 式, 可設定 $k = \chi_\alpha^2$ 且得

$$\text{RR} = \left\{\chi^2 > \chi_\alpha^2\right\}$$

如圖示.

類推, 得

(ii) 檢定

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ 對立於 } H_a : \sigma^2 < \sigma_0^2$$

下尾檢定.

檢定統計量: $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

拒絕域: RR $= \left\{\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}\right\}$, 如圖示.

(iii) 檢定

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ 對立於 } H_a : \sigma_2 \neq \sigma_0^2$$

檢定統計量: $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

拒絕域: RR $= \left\{\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2} \text{ 或 } \chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}\right\}$, 如圖示.

例 1. 10 個引擎零件直徑的樣本變異爲 $s^2 = 0.0003$ 並設直徑爲常態分布. 又製造公司宣稱直徑變異數小於或等於 0.0002.

(a) 試問在 $\alpha = 0.05$ 下, 資料是否可充分反駁公司的宣稱? (反駁是研究目標)

(b) 與此資料相關的 p-值爲何?

<解> 依題意, 需檢定

$$H_0 : \sigma^2 = 0.0002 \text{ 對立於 } H_a : \sigma^2 > 0.0002$$

在常態分布下, 可取檢定統計量

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1) = \chi^2(9)$$

當 H_0 爲眞時且 $n = 10$. 又查表 6, 得

$$P(\chi^2(9) > 16.9190) = 0.05$$

故

$$\text{RR} = \left\{\chi^2 > \chi^2_{0.05}\right\} = \left\{\chi^2 > 16.9190\right\}$$

如圖示. 最後, 由資料, χ^2 的觀察值

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{9(0.0003)}{0.0002} = 13.5 \notin \text{RR}$$

故不拒絕 H_0, 即無充分證據反駁公司的宣稱.

(b) 因爲 $\text{RR} = \left\{\chi^2 > \chi^2_\alpha\right\}$, 故與 $\chi^2 = 13.5$ 關連的

$$p\text{-值} = P(\chi^2 > 13.5)$$

其中 $\chi^2 \sim \chi^2(9)$. 又由表 6, 得

$$P(\chi^2(9) > 14.6837) = 0.1$$

故 p-值 > 0.1, 如圖示, 或
R: p-值 $=$ `1-pchisq(13.5, df=9) = 0.1412538`
因此, 在

$$\alpha \leq 0.1 \ (< p\text{-值})$$

下, 無法拒絕 H_0.

例 2. 某實驗者深信其測量儀器變異性產生的標準差爲 2. 又 16 個度量値的 $s^2 = 6.1$.

(a) 試問資料是否與宣稱不一致?

(b) 試求此檢定的 p-値.

(c) 若取 $\alpha = 0.05$, 結論爲何?

<解> 依題意並在常態性假設下, 需檢定

$$H_0 : \sigma^2 = 4 \text{ 對立於 } H_a : \sigma^2 \neq 4$$

雙尾檢定, 並取檢定統計量

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1) = \chi^2(15)$$

當 H_0 真時且 $n = 16$. 又由資料, 得 χ^2 的觀察值

$$\chi^2 = \frac{15(6.1)}{4} = 22.875$$

因爲拒絕域

$$\text{RR} = \left\{\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2} \text{ 或 } \chi^2 > \chi^2_{\alpha/2}\right\}$$

故與 $\chi^2 = 22.875$ 關連的

$$p\text{-值} = 2P(\chi^2(15) > 22.875)$$

又由表 6, 得

$$P(\chi^2(15) > 22.3072) = 0.1$$

且

$$P(\chi^2(15) > 24.9958) = 0.05$$

如圖示. 因此,

$$2(0.05) < p\text{-值} < 2(0.1)$$

即

$$0.1 < p\text{-值} < 0.2$$

或

R: `2*(1-pchisq(22.875, df=15)) = 0.1736603`

最後, 若取

$$\alpha = 0.05 < p\text{-值}$$

則不拒絕 H_0, 即無法拒絕實驗者的宣稱 (深信的值).

二. 雙變異數的檢定, 又稱作 F 檢定

設隨機變數

$$Y_{11}, \ldots, Y_{1n_1} \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu_1, \sigma_1^2)$$

且

$$Y_{21}, \ldots, Y_{2n_2} \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

以及此二組樣本 (Y_{1i}'s 與 Y_{2i}'s) 相互獨立, 其中 μ_1, μ_2, σ_1^2 與 σ_2^2 均未知.

(i) 檢定

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ 對立於 } H_a : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

因爲若 $\sigma_1^2 \gg \sigma_2^2$, 則 $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ 相對地大, 而較不支持 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, 故拒絕 H_0. 因此, 可採用

$$\text{RR} = \left\{ \frac{S_1^2}{S_2^2} > k \right\}$$

某常數 k 使得

$$\alpha = P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} > k,\ \text{當 } H_0 \text{ 眞時}\right)$$

問. 統計量 $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ 的分布爲何?

答. 因爲

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1-1)$$

且

$$\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2-1)$$

以及 S_1^2 與 S_2^2 相互獨立, 故由 F 分布的定義,

$$\begin{aligned}\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2(n_1-1)}\Bigg/\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2(n_2-1)} &= \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\\ &\sim F(n_1-1,n_2-1)\end{aligned}$$

因此, 得檢定統計量

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

因爲由上式, 當 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 眞時,

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

且拒絕域

$$\text{RR} = \{F > F_\alpha\}$$

其中 $P(F(n_1 - 1, n_2 - 1) > F_\alpha) = \alpha$, 如圖示.

(ii) 檢定

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ 對立於 } H_a: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

交換足標 1 與足標 2 並以 (i) 的過程檢定

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ 對立於 } H_a: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

(iii) 檢定

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ 對立於 } H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

檢定統計量爲

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1) \overset{\text{表成}}{=} F_{n_2-1}^{n_1-1}$$

當 $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 眞時. 因爲 $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ 相對地大或相對地小時, 較不支持 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, 而拒絕 H_0, 故拒絕域可採爲

$$\mathrm{RR} = \left\{ F = \frac{S_1^2}{S_2^2} < k_1 \text{ 或 } F = \frac{S_1^2}{S_2^2} > k_2 \right\} \tag{3}$$

某常數 k_1 與 k_2. 在意義水準 α 下, 可取 k_1 與 k_2 使得

$$P\left(F_{n_2-1}^{n_1-1} < k_1\right) = \alpha/2 \tag{4}$$

且

$$P\left(F_{n_2-1}^{n_1-1} > k_2\right) = \alpha/2$$

如圖示, 即

$$k_2 = F_{n_2-1,\alpha/2}^{n_1-1}$$

其中 $P\left(F_{n_2-1}^{n_1-1} > F_{n_2-1,\alpha/2}^{n_1-1}\right) = \alpha/2$. 又 (4) 式乃相當於

$$P\left(\left(F_{n_2-1}^{n_1-1}\right)^{-1} > k_1^{-1}\right) = \alpha/2$$

再由 F 分布的定義, 得

$$\left(F_{n_2-1}^{n_1-1}\right)^{-1} = F_{n_1-1}^{n_2-1}$$

因此, 比較上二式, 得

$$k_1^{-1} = F_{n_1-1,\alpha/2}^{n_2-1}$$

即

$$k_1 = \left(F^{n_2-1}_{n_1-1,\alpha/2}\right)^{-1}$$

最後, 將 k_1 與 k_2 代入 (3) 式, 得

$$\text{RR} = \left\{F > F^{n_1-1}_{n_2-1,\alpha/2} \text{ 或 } F < \left(F^{n_2-1}_{n_1-1,\alpha/2}\right)^{-1}\right\}$$

註. 上式等價於

$$\text{RR} = \left\{\frac{S_1^2}{S_2^2} > F^{n_1-1}_{n_2-1,\alpha/2} \text{ 或 } \frac{S_2^2}{S_1^2} > F^{n_2-1}_{n_1-1,\alpha/2}\right\}$$

故令

$$S_L^2 = \max(S_1^2, S_2^2),\ \ S_S^2 = \min(S_1^2, S_2^2)$$

且

$$\nu_L = S_L^2 \text{ 的 df},\ \ \nu_S = S_S^2 \text{ 的 df}$$

可得

$$\text{RR} = \left\{\frac{S_L^2}{S_S^2} > F^{\nu_L}_{\nu_S,\alpha/2}\right\}$$

因此, 等價於 (iii) 的檢定為檢定統計量

$$F = \frac{S_L^2}{S_S^2}$$

且拒絕域

$$\mathrm{RR} = \left\{ F > F_{\alpha/2} \right\}$$

其中 $F_{\alpha/2}$ 使得 $P\left(F_{\nu_S}^{\nu_L} > F_{\alpha/2}\right) = \alpha/2.$

例 3. 設兩家公司的引擎零件變異的資料爲

公司 1 (例 1 的)	公司 2 (競爭者)
$n_1 = 10$	$n_2 = 20$
$s_1^2 = .0003$	$s_2^2 = .0002$

(a) 在 $\alpha = 0.05$ 下, 資料是否充分支持公司 2 的變異較小?

(b) 試求此資料關連的 p-值.

<解> (a) 依題意並在常態假設下, 需檢定

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ 對立於 } H_a : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

並取統計檢定量

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{n_2-1}^{n_1-1} = F_{19}^{9}$$

當 H_0 眞時. 又由表 7, 得

$$P(F_{19}^{9} > 2.42) = 0.05 = \alpha$$

故拒絕域

$$\text{RR} = \{F > 2.42\}$$

最後, 根據資料, 得 F 的觀察值

$$f = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{0.0003}{0.0001} = 3 \in \text{RR}$$

因此, 拒絕 H_0 且資料充分顯示公司 2 的直徑變異較小.

(b) 因爲 $\text{RR} = \{F > F_\alpha\}$, 故與 $f = 3$ 關連的

$$p\text{-值} = P(F_{19}^{9} > 3)$$

又由表 7, 得

$$P(F_{19}^{9} > 2.88) = 0.025$$

且

$$P(F_{19}^{9} > 3.52) = 0.01$$

故

$$0.01 < p\text{-值} < 0.025$$

或

R: p-值 = `1-pf(3, 9, 19) = 0.02096038`
如圖示. 因此, 在

$$\alpha = 0.025 \ (> p\text{-值})$$

下, 拒絕 H_0; 但在

$$\alpha = 0.01 \ (< p\text{-值})$$

下, 不拒絕 H_0.

例 4. 男性與女性的電擊疼痛門檻資料爲

	男性	女性
n	14	10
$\overline{y}$	16.2	14.9
s^2	12.7	26.4

(a) 在 $\alpha = 0.10$ 下, 資料是否充分顯示男性與女性疼痛門檻變異性的差異?

(b) 與此資料關連的 p-值爲何?

<解> (a) 依題意並在常態假設下, 需檢定

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ 對立於 } H_a : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

並取檢定量

$$F = \frac{S_L^2}{S_S^2} \sim F_{13}^9$$

當 H_0 眞時. 又由表 7, 得

$$P(F_{13}^9 > 2.71) = 0.05 = \alpha/2$$

故拒絕域

$$\text{RR} = \{F > 2.71\}$$

最後, 由資料, 得 F 的觀察值

$$f = \frac{26.4}{12.7} = 2.079 \notin \text{RR}$$

故不拒絕 H_0, 即無充分證據宣稱男性與女性疼痛門檻變異性有差異.

(b) 因雙尾檢定且觀察值爲 2.079, 故關連的

$$p\text{-值} = 2P(F_{13}^9 > 2.079)$$

由表 7, 得

$$P(F_{13}^9 > 2.16) = 0.1$$

故

$$p\text{-值} > 2(0.1) = 0.2$$

或

R: p-值 = `2*[1-pf(2.079, 9, 13)]`

如圖示. 或

$$\begin{aligned} p\text{-值} &= \texttt{pf}(26.4/12.7, 9, 13, \texttt{lower.tail} = \texttt{F}) + \\ &\qquad \texttt{pf}(12.7/26.4, 13, 9, \texttt{lower.tail} = \texttt{T}) \\ &= 2 * \texttt{pf}(26.4/12.7, 9, 13, \texttt{lower.tail} = \texttt{F}) \end{aligned}$$

註. χ^2 檢定與 F 檢定均非常敏感於母體常態性假設的偏離, 故對常態性假設而言, 不是穩健的.