# 單元 30: $\mu$ 與 $\mu_1 - \mu_2$ 的小樣本假設檢定

(課本 §10.8)

首先, 探討

## 一. 常態母體期望值 $\mu$ 的小樣本檢定

設隨機變數

$$Y_1, \ldots, Y_n$$

爲一由 $N(\mu, \sigma^2)$, $\mu$ 與 $\sigma^2$ 均未知的母體所選取的大小爲 $n$ 的隨機樣本. 若

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ 爲眞時}$$

則由 §8.8 知,

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\overline{Y} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

自由度爲 $n-1$ 的 $t$ 分布, 如圖示. 故類似於大樣本 $Z$ 檢定的推導, 在意義水準 $\alpha$ 下, 得對立假設

$$H_a : \begin{cases} \mu > \mu_0 & \text{(上尾對立假設)} \\ \mu < \mu_0 & \text{(下尾對立假設)} \\ \mu \neq \mu_0 & \text{(雙尾對立假設)} \end{cases}$$

檢定統計量: $T=\dfrac{\overline{Y}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$

拒絕域

$$\text{RR}:\begin{cases} t>t_\alpha & (\text{上尾 RR}) \\ t<-t_\alpha & (\text{下尾 RR}) \\ |t|>t_{\alpha/2} & (\text{雙尾 RR}) \end{cases}$$

其中 $P(T>t_\alpha)=\alpha$ 且 $T\sim t(n-1)$.

## 二. 二獨立, 同變異數常態母體期望值差 $\mu_1-\mu_2$ 的小樣本檢定

設隨機變數

$$Y_{11},\ldots,Y_{1n_1}\sim N(\mu_1,\sigma^2)$$

以及隨機變數

$$Y_{21},\ldots,Y_{2n_2}\sim N(\mu_2,\sigma^2)$$

其中 $\mu_1$, $\mu_2$ 與 $\sigma^2$ 均未知, 且此二隨機樣本間亦相互獨立. 由 §8.8 知, 令 $\sigma^2$ 的共用估計量 (pooled estimator)

$$S_p^2\overset{\text{def}}{=}\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

其中對於 $i=1,2,$

$$S_i^2=\frac{1}{n_i-1}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\overline{Y}_i),\ \overline{Y}_i=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}Y_{ij}$$

則在虛無假設

$$H_0=\mu_1-\mu_2=d_0$$

爲眞時,

$$T\overset{\text{def}}{=}\frac{\overline{Y}_1-\overline{Y}_2-d_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

自由度爲 $n_1+n_2-2$ 的 $t$ 分布, 如圖示.

故類似於大樣本 $Z$ 檢定的推導, 在意義水準 $\alpha$ 下, 得對立假設

$$H_a:\begin{cases}\mu_1-\mu_2>d_0 & \text{(上尾對立假設)}\\ \mu_1-\mu_2<d_0 & \text{(下尾對立假設)}\\ \mu_1-\mu_2\neq d_0 & \text{(雙尾對立假設)}\end{cases}$$

檢定統計量

$$T=\frac{\overline{Y}_1-\overline{Y}_2-d_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

其中 $S_p=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$.

拒絕域

$$\text{RR}:\begin{cases} t>t_\alpha & (\text{上尾 RR})\\ t<-t_\alpha & (\text{下尾 RR})\\ |t|>t_{\alpha/2} & (\text{雙尾 RR})\end{cases}$$

其中 $P(T>t_\alpha)=\alpha$ 且 $T\sim t(n_1+n_2-2)$.

例 1. 某 8 發新火藥子彈的槍口速度資料爲

$$\overline{y}=2959,\ s=39.1$$

且製造商宣稱平均速度至少 3000.

**(a)** 試問在意義水準 0.025 下, 樣本資料是否提供充分證據反駁製造商的宣稱? (反駁是我們的研究目標)

**(b)** 與此檢定關連的 $p$-值爲何?

<解> 在假設樣本是近似常態分布下, 可採用小樣本檢定

$$H_0:\mu=3000 \text{ 對立於 } H_a:\mu<3000$$

故在樣本大小 $n=8$ 下, 檢定統計量

$$T=\frac{\overline{Y}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(7)$$

又查表 5, 得

$$P(t(7) > 2.365) = 0.025 = \alpha$$

或

$$\text{R: } t_{0.025} = \texttt{qt(0.975, df=7)}$$

故拒絕域

$$RR = \{t < -t_\alpha\} = \{t < -2.365\}$$

如圖示. 最後, 由資料, $T$ 的觀察值

$$t = \frac{\overline{y} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{2959 - 3000}{39.1/\sqrt{8}} = -2.966 \in \text{RR}$$

故在 $\alpha = 0.025$ 下, 資料顯示充分證據反駁製造商的宣稱, 並得平均速度小於 3000.

(b) 因爲 RR $= \{t < -t_\alpha\}$, 故

$$p\text{-值} = P(T < -2.966)$$

其中 $T \sim t(7)$, 如圖示. 又由表 5, 得

$$P(t(7) > 2.365) = 0.025$$

即

$$P(t(7) < -2.365) = 0.025$$

且

$$P(t(7) > 2.998) = 0.01$$

即

$$P(t(7) < -2.998) = 0.01$$

如圖示, 亦即找二值挾住觀察值, 故

$$0.01 < p\text{-值} < 0.025$$

或

$$p\text{-值} = \texttt{pt(-2.966, df=7)} = 0.01046307$$

因此, 在

$$\alpha = 0.025 \ (> p\text{-值})$$

下, 拒絕 $H_0$; 但在

$$\alpha = 0.01 \ (< p\text{-值})$$

下, 不拒絕 $H_0$.

例 2. 二種訓練下, 完成組裝程序所需時間資料爲

| 標準法 | 新法 |
|---|---|
| $n_1 = 9$ | $n_2 = 9$ |
| $\overline{y}_1 = 35.22$ | $\overline{y}_2 = 31.56$ |
| $\sum_{i=1}^{9} (y_{1i} - \overline{y}_1)^2 = 195.56$ | $\sum_{i=1}^{9} (y_{2i} - \overline{y}_2)^2 = 160.22$ |

並假設取自二獨立同變異數常態母體.

**(a)** 試問在意義水準 $\alpha = 0.05$ 下, 資料是否充分顯示此二法的差異?

**(b)** 與此檢定關連的 $p$-值爲何?

<解> 由題意及假設, 可採用 $\mu_1-\mu_2$ 的小樣本檢定

$H_0: \mu_1-\mu_2 = d_0 = 0$ 對立於 $H_a: \mu_1-\mu_2 \neq 0$

故在 $n_1 = n_2 = 9$ 下, 檢定統計量

$$T = \frac{\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2 - d_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(9+9-2) = t(16)$$

又由表 5, 得

$$P(t(16) > 2.120) = 0.025 = \alpha/2$$

或

R: $t_{0.025}$ = `qt(0.975, df=16)`

故拒絕域

$$\text{RR} = \{|t| > t_{0.025}\} = \{|t| > 2.120\}$$

如圖示. 最後, 根據資料且

$$\begin{aligned} S_p^2 &= \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} \\ &= \frac{1}{16}(195.56 + 160.22) = 22.24 \end{aligned}$$

得 $T$ 的觀察值

$$\begin{aligned} t &= \frac{\overline{y}_1-\overline{y}_2-d_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{35.22-31.56}{\sqrt{22.24}\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}} \\ &= 1.65 \notin \text{RR} \end{aligned}$$

故在 $\alpha = 0.05$ 下, 不拒絕 $H_0$, 即資料無法充分顯示二法有差異.

(b) 因爲 $\text{RR} = \{|t| > t_{\alpha/2}\}$, 故與 $t = 1.65$ 關連的

$$\begin{aligned} p\text{-值} &= P(|T| > 1.65),\ T \sim t(16) \\ &= P(T < -1.65) + P(T > 1.65) \\ &= A_1 + A_2 \end{aligned}$$

如圖示. 又由表 5, 得

$$t_{0.1} = 1.337 \text{ 以及 } t_{0.05} = 1.746$$

如圖示, 故

$$0.05 < A_1 < 0.1$$

且由對稱性, 亦得

$$0.05 < A_2 < 0.1$$

因此,

$$2(0.05) < p\text{-值} < 2(0.1)$$

即

$$0.1 < p\text{-值} < 0.2$$

或

R: $p$-值 $=$ `2*pt(-1.65, df=16)=0.1184333`

故在

$$\alpha = 0.05 \ (< p\text{-值})$$

下, 不拒絕 $H_0$.

註. 一統計檢定稱作穩健的 (robust) 若它不敏感於 (insensitive) 假設的不成立, 如單一期望值 $t$ 檢定對常態性是穩健的; 比較二期望值的檢定, 又稱作雙樣本 $t$ 檢定 (two-sample $t$ test), 對常態性, 或當 $n_1 \approx n_2$ 時, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 的假設均是穩健的.