單元 28: 統計檢定結果報告的另一表示法: 獲得水準或 p-值
(課本 §10.6)

設 $\widehat{\theta}$ 爲 θ 的檢定統計量且

$$\mathrm{RR} = \{\widehat{\theta} > k\},\ \text{某常數}\ k$$

如圖示. 則由

$$\alpha = 0.01 = P(\widehat{\theta} > k_1,\ \text{當}\ H_0\ \text{眞時})$$

某常數 k_1, 得

$$\mathrm{RR} = \{\widehat{\theta} > k_1\}$$

且由

$$\alpha = 0.05 = P(\widehat{\theta} > k_2,\ \text{當}\ H_0\ \text{眞時})$$

某常數 k_2, 得

$$\mathrm{RR} = \{\widehat{\theta} > k_2\}$$

以及 $k_2 < k_1$, 如圖示. 令

$$q = \widehat{\theta}\ \text{的觀察值}$$

若

$$k_2 < q < k_1$$

則在 $\alpha = 0.05$ 下, 拒絕 H_0; 在 $\alpha = 0.01$ 下, 不拒絕 H_0, 意即因 α 的選取 (不同的檢定) 而異, 故 α 亦稱作檢定的意義水準.

問. 如何客觀地作檢定報告?

答. 下述定義的 p-值報告, 並由決策者判斷.

定義. 令 W 爲一檢定統計量而且 w_0 爲 W 的一觀察值, 則與 w_0 關連的 p-值 (又稱作獲得意義水準) 爲可由 w_0 作出拒絕 H_0 的最小意義水準 α.

註 1. p-值爲一

$$\text{統計量} : w_0 \rightarrow \ p\text{-value}$$

因觀察值 w_0 而定.

註 2. 若決策者選取

$$\alpha \geq \ p\text{-值}$$

則拒絕 H_0; 若

$$\alpha < \ p\text{-值}$$

不拒絕 H_0.

註 3. 計算 p-值的方法爲

(1) 若拒絕域

$$\text{RR} = \{W \leq k\}$$

則根據 w_0 拒絕 H_0 若且唯若 $w_0 \leq k$, 如圖示. 因此, 由定義, 與 w_0 關連的

$$\begin{aligned} p\text{-值} &= \min_{w_0 \leq k} P(W \leq k, \text{ 當 } H_0 \text{ 眞時}) \\ &= P(W \leq w_0, \text{ 當 } H_0 \text{ 眞時}) \end{aligned}$$

故可顯示觀察值 w_0 不支持 H_0 的程度, p-值愈小, 在 H_0 下愈視 w_0 爲極端稀有值, 與觀察到 w_0 的現況不符, 愈不支持 H_0.

(2) 若拒絕域

$$\text{RR} = \{W \geq k\}$$

如圖示, 則

$$\begin{aligned} p\text{-值} &= \min_{w_0 \geq k} P(W \geq k, \text{ 當 } H_0 \text{ 眞時}) \\ &= P(W \geq w_0, \text{ 當 } H_0 \text{ 眞時}) \end{aligned}$$

(3) 若拒絕域

$$\text{RR} = \{|W| \neq k\}$$

如圖示, 得

$$\begin{aligned} p\text{-值} &= \min_{|w_0| \geq k, k>0} P(|W| \geq k, \text{ 當 } H_0 \text{ 眞時}) \\ &= P(|W| \geq |w_0|, \text{ 當 } H_0 \text{ 眞時}) \\ &= P(W \geq |w_0|, \text{ 當 } H_0 \text{ 眞時}) + \\ &\qquad P(W \leq -|w_0|, \text{ 當 } H_0 \text{ 眞時}) \end{aligned}$$

例 1. 針對 1 號候選人的得票率 p, 檢定

$$H_0 : p = 0.5 \text{ 對立於 } H_a : p < 0.5$$

取檢定統計量

$$\overline{Y} = \text{ 支持 1 的選民數}$$

若抽樣 $n = 15$ 位, 得 $Y = 3$. 試求與此觀察值關連的 p-值.

<解> 因爲下尾檢定, 拒絕域 RR $= \{Y \leq k\}$, 如圖示, 故

$$\begin{aligned} p\text{-值} &= P(Y \leq 3 \text{ 當 } p = 0.5) \\ &= \sum_{y=0}^{3} \binom{15}{y} (0.5)^y (0.5)^{15-y} \\ &= 0.018 \end{aligned}$$

由表 1 或

R: `pbinom(3, 15, 0.5)`

註. 若

$$\alpha \geq 0.018$$

則根據 $Y = 3$, 拒絕 H_0; 若

$$\alpha < 0.018$$

則由 $Y = 3$, 不拒絕 H_0.

例 2. 一心理學研究的資料爲

男性	女性
$n_1 = 50$	$n_2 = 50$
$\overline{y}_1 = 3.6$	$\overline{y}_2 = 3.8$
$s_1^2 = .18$	$s_2^2 = .14$

試在檢定

$$H_0 : d = \mu_1 - \mu_2 = 0 \text{ 對立於 } H_a : d \neq 0$$

下, 求此資料關連的 p-值.

<解> 因爲雙尾檢定, 檢定統計量

$$Z = \frac{\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2 - 0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

且拒絕域

$$\text{RR} = \{|Z| \geq k\}$$

以及在 $n_1 = n_2 = 50 > 30$ 夠大下, Z 的觀察值

$$\begin{aligned} z &= \frac{\overline{y}_1 - \overline{y}_2 - 0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \approx \frac{\overline{y}_1 - \overline{y}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{3.6 - 3.8}{\sqrt{\frac{.18}{50} + \frac{.14}{50}}} \\ &= -2.5 \end{aligned}$$

故在 n_1 與 n_2 夠大及 $N(0,1)$ 的對稱性下,

$$\begin{aligned} p\text{-值} &= P(|Z| \geq |-2.5|) \approx P(|N(0,1)| \geq 2.5) \\ &= 2P(N(0,1) \geq 2.5) \\ &= 2(0.0062) = 0.0124 \end{aligned}$$

或

R: p-值 = `2*(1-pnorm(2.5))`

註. 若取

$$\alpha = 0.05 \ (> p\text{-值})$$

則根據資料拒絕 H_0; 若

$$\alpha = 0.01 \ (< p\text{-值})$$

則無法根據資料拒絕 H_0.