單元 27: 假設檢定過程與信賴區間的關係
(課本 §10.5)

設 $\widehat{\theta}$ 爲 θ 的不偏估計量且當 n 夠大時,

$$\frac{\widehat{\theta}-\theta}{\sigma_{\widehat{\theta}}} \approx N(0,1)$$

則

(i) θ 的 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間爲

$$\widehat{\theta} \pm z_{\alpha/2}\sigma_{\widehat{\theta}}$$

(ii) 在 α 下, 雙尾檢定

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ 對立於 } H_a : \theta \neq \theta_0$$

的拒絕域

$$\begin{aligned} \text{RR} &= \{\widehat{\theta} < \theta_0 - z_{\alpha/2}\sigma_{\widehat{\theta}} \text{ 或 } \widehat{\theta} > \theta_0 + z_{\alpha/2}\sigma_{\widehat{\theta}}\} \\ &= \{|z| > z_{\alpha/2}\} \end{aligned}$$

其中檢定統計量

$$Z = \frac{\widehat{\theta}-\theta_0}{\sigma_{\widehat{\theta}}}$$

若

$$\overline{\text{RR}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{RR 的餘集} = \{|z| \le z_{\alpha/2}\}$$

稱作接受域 (acceptance region), 則不拒絕 H_0, 當

$$-z_{\alpha/2} \le \frac{\widehat{\theta} - \theta_0}{\sigma_{\widehat{\theta}}} \le z_{\alpha/2}$$

經由整理, 亦相當於

$$\widehat{\theta} - z_{\alpha/2}\sigma_{\widehat{\theta}} \le \theta_0 \le \widehat{\theta} + z_{\alpha/2}\sigma_{\widehat{\theta}} \tag{1}$$

因此, 比較 (i) 與 (1) 式, 得不拒絕 H_0 若且唯若

$$\theta_0 \in [\widehat{\theta} - z_{\alpha/2}\sigma_{\widehat{\theta}},\ \widehat{\theta} + z_{\alpha/2}\sigma_{\widehat{\theta}}]$$

即 θ_0 在 θ 的 $100(1-\alpha)\%$ 雙邊信賴區間內.

同理, θ 的 $100(1-\alpha)\%$ 下界信賴區間爲

$$[\widehat{\theta} - z_{\alpha}\sigma_{\widehat{\theta}},\ \infty) \tag{2}$$

且在 α 下, 上尾檢定

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ 對立於 } H_a : \theta > \theta_0$$

的拒絕域

$$\text{RR} = \{\widehat{\theta} > \theta_0 + z_{\alpha}\sigma_{\widehat{\theta}}\}$$

故不拒絕 H_0, 當

$$\widehat{\theta} \le \theta_0 + z_{\alpha}\sigma_{\widehat{\theta}}$$

亦相當於

$$\widehat{\theta} - z_\alpha \sigma_{\widehat{\theta}} \leq \theta_0 \qquad (3)$$

因此, 比較 (2) 式與 (3) 式, 得不拒絕 H_0 若且唯若

$$\theta_0 \in [\widehat{\theta} - z_\alpha \sigma_{\widehat{\theta}},\ \infty)$$

即 θ_0 在 θ 的 $100(1-\alpha)\%$ 下界信賴區間內.

最後, 請自行推導, 下尾檢定

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ 對立於 } \theta < \theta_0$$

時, 不拒絕 H_0 若且唯若

$$\theta_0 \in (-\infty,\ \widehat{\theta} + z_\alpha \sigma_{\widehat{\theta}}]$$

即 $\widehat{\theta}$ 在 θ 的 $100(1-\alpha)\%$ 上界信賴區間內.

註. 請自行推導拒絕 H_0 與信賴區間的關係.