單元 26: 計算型 II 錯誤機率以及求 Z 檢定的樣本大小
(課本 §10.4)

檢定

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ 對立於 } H_a : \theta > \theta_0$$

即上尾檢定, 則

$$\text{RR} = \{\hat{\theta} > k\}$$

其中

$$k = \theta_0 + z_\alpha \sigma_{\hat{\theta}}$$

若 α 給定時, 則針對一特定的對立值 (alternative), 如

$$\theta = \theta_a \ (> \theta_0)$$

且在假設

$$\frac{\hat{\theta} - \theta}{\sigma_{\hat{\theta}}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$$

下, 根據定義, 當 n 夠大時, 得

$$\begin{aligned}
\beta &= P(\hat{\theta} \notin \text{RR}, \text{ 當 } H_a \text{ 真時}) \\
&= P(\hat{\theta} \le k, \text{ 當 } \theta = \theta_a) \\
&= P\left(\frac{\hat{\theta} - \theta_a}{\sigma_{\hat{\theta}}} \le \frac{k - \theta_a}{\sigma_{\hat{\theta}}}, \text{ 當 } \theta = \theta_a\right) \\
&\approx P\left(N(0,1) \le \frac{k - \theta_a}{\sigma_{\hat{\theta}}}\right)
\end{aligned}$$

如圖示, 當 n 夠大且固定,

(1) 當 $\theta_a \approx \theta_0$ 時, 則 $\widehat{\theta} \approx \theta_0$, 當 H_a 眞時, 故較難檢測何者爲眞, 而得較大的 β.

(2) 當 $\theta_a \gg \theta_0$ 時, 則 $\widehat{\theta} \gg \theta_0$, 當 H_a 眞時, 故缺乏 H_0 的支持, 而得較小的 β.

(3) 欲同時降低 α 與 β, 可考慮選取更大的樣本大小 n.

爲何如此? 因爲

$$k = \theta_0 + z_\alpha \sigma_{\widehat{\theta}}$$

其中

$$\sigma_{\widehat{\theta}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{或} \quad \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

或

$$\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \quad \text{或} \quad \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$

且 α 給定並且夠小 (亦相當於 z_α 給定), 故當樣本大小 $n \to \infty$ 時, $\sigma_{\widehat{\theta}} \to 0$, 而得 $\widehat{\theta}$ 的 pdf $f(\widehat{\theta})$

更陡峭, 能更將 θ_a 與 θ_0 分開, 並在 θ_a 相對地大於 θ_0 時, β 就會較小, 如圖示.

註. 下尾及雙尾檢定的情況, 請自行推導.

例 1. 接續 §10.3, 例 1, 設副總裁欲檢測一件的差異, 即檢定

$$H_0 : \mu = 15 \text{ 對立於 } H_a : \mu = 16$$

試在 $\alpha = 0.05$ 下, 根據下述資料

$$n = 36,\ \overline{y} = 17,\ s^2 = 9$$

求 β.

<解> 由上尾檢定及 $\alpha = 0.05$, 根據表 4, 得

$$z_\alpha = 1.645 \text{ 或 } z_\alpha = \texttt{qnorm}(0.95)$$

且在 $n = 36$ 夠大以及 $\sigma \approx s$ 下,

$$\begin{aligned} \text{RR} &= \left\{\overline{y} > \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} \approx \left\{\overline{y} > \mu_0 + z_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}\right\} \\ &= \left\{\overline{y} > 15 + 1.645 \frac{3}{\sqrt{36}}\right\} \\ &= \{\overline{y} > 15.8225\} \end{aligned}$$

因此, 在 $n = 36$ 夠大且 $\mu_a = 16$ 以及 $\sigma \approx s$ 下,

$$\begin{aligned}
\beta &= P(\overline{Y} \leq 15.8225,\ \text{當 } H_a \text{ 眞時}) \\
&= P\left(\frac{\overline{Y} - \mu_a}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{15.8225 - \mu_a}{\sigma/\sqrt{n}},\ \text{當 } H_a \text{ 眞時}\right) \\
&\approx P\left(N(0,1) \leq \frac{15.8225 - 16}{3/\sqrt{36}}\right) \\
&= P(N(0,1) \leq -0.36) = 0.3594
\end{aligned}$$

太大, 故當樣本大小 $n = 36$ 時, 不容易檢測出一件的差異, 可考慮增加樣本大小而降低 β 值.

問. 如何選取適當的樣本大小?

答. 檢定

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ 對立於 } H_a : \theta > \theta_0$$

上尾檢定, 則 RR $= \{\widehat{\theta} > k\}$, 故且確定一對立值

$$\theta = \theta_a \ (> \theta_0)$$

時, 在任意給定的 α 與 β 下,

$$\begin{aligned}
\alpha &= P(\widehat{\theta} > k,\ \text{當 } \theta = \theta_0) \\
&= P\left(\frac{\widehat{\theta} - \theta_0}{\sigma_{\widehat{\theta}}} > \frac{k - \theta_0}{\sigma_{\widehat{\theta}}},\ \text{當 } \theta = \theta_0\right) \\
&\approx P\left(N(0,1) > \frac{k - \theta_0}{\sigma_{\widehat{\theta}}}\right) \qquad (1)
\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} \beta &= P(\widehat{\theta} \le k,\ \text{當 } \theta = \theta_a) \\ &= P\left(\frac{\widehat{\theta} - \theta_a}{\sigma_{\widehat{\theta}}} \le \frac{k - \theta_a}{\sigma_{\widehat{\theta}}},\ \text{當 } \theta = \theta_a\right) \\ &\approx P\left(N(0,1) \le \frac{k - \theta_a}{\sigma_{\widehat{\theta}}}\right) \qquad (2) \end{aligned}$$

其中

$$k = \theta_0 + z_\alpha \sigma_{\widehat{\theta}}$$

且

$$\sigma_{\widehat{\theta}} \to 0,\ \text{當 } n \to \infty$$

故

$$\theta_0 < k < \theta_a$$

如圖示. 又

$$P(N(0,1) > z_\alpha) = \alpha$$

且

$$P(N(0,1) < -z_\beta) = \beta$$

故由 (1) 式與 (2) 式, 可設定

$$\begin{aligned} \frac{k - \theta_0}{\sigma_{\widehat{\theta}}} &= z_\alpha \\ \frac{k - \theta_a}{\sigma_{\widehat{\theta}}} &= -z_\beta \end{aligned}$$

解 k, 得

$$k = \theta_0 + z_\alpha \sigma_{\hat{\theta}} = \theta_a - z_\beta \sigma_{\hat{\theta}} \tag{3}$$

因此, 若 $\sigma_{\hat{\theta}}$ 可由 n 表示, 則可由 (3) 式解 n.

舉例, 若

$$\hat{\theta} = \bar{y} \ (\mu \text{ 的不偏估計量})$$

則

$$\sigma_{\hat{\theta}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

故由 (3) 式, 得

$$\mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu_a - z_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

合併含 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 的各項, 得

$$(z_\alpha + z_\beta)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu_a - \mu_0$$

故

$$n = \frac{(z_\alpha + z_\beta)^2 \sigma^2}{(\mu_a - \mu_0)^2}$$

同理, 若

$$\hat{\theta} = \hat{p} \ (p \text{ 的不偏估計量})$$

則

$$\sigma_{\hat{\theta}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

且

$$n = \frac{(z_\alpha + z_\beta)^2 p(1-p)}{(p_a - p_0)^2}$$

註. 下尾檢定的情況, 請自行推導. 可推導雙尾檢定的 n 嗎?

例 2. 接續例 1, 若副總裁欲在 $\alpha = \beta = 0.05$ 下, 檢定

$$H_0 : \mu = 15 \text{ 對立於 } H_a : \mu = 16$$

試求可確保此準確度的樣本大小 n.

<解> 因爲 $\alpha = \beta = 0.05$, 故由表 4, 得

$$z_\alpha = z_\beta = 1.645$$

又 $s^2 = 9 \approx \sigma^2$, 代入, 得

$$n = \frac{(1.645 + 1.645)^2 9}{(16 - 15)^2} = 97.4$$

因此, 取 $n = 98$ 個觀察值應可確保 $\alpha \approx \beta \approx 0.05$.