單元 21: 最大概似估計量的大樣本性質
(課本 §9.8)

最大概似估計量 (MLE) $\widehat{\theta}$ 的一些性質爲

(1) 若 U 是 θ 的充分統計量, 則 $\widehat{\theta}$ 會是 U 的某函數且經調整後, 某 $\widehat{\theta}$ 的函數 $f(\widehat{\theta})$ 會是一 MVUE.

(2) 不變性, 即 θ 函數 $t(\theta)$ 的 MLE

$$\widehat{t(\theta)} = t(\widehat{\theta})$$

(3) 在本書所探討的分布所滿足的正規條件下, $t(\widehat{\theta})$ 是 $t(\theta)$ 的一致估計量.

(4) 此外, 大樣本性質爲, 若 $t(\theta)$ 是 θ 的可微函數, 在大樣本下,

$$\begin{aligned} Z &\overset{\text{def}}{=} \frac{t(\widehat{\theta}) - t(\theta)}{\sqrt{\left[\frac{\partial t(\theta)}{\partial \theta}\right]^2 \Big/ nE\left[-\frac{\partial^2 \ln f(Y|\theta)}{\partial \theta^2}\right]}} \\ &\overset{\mathcal{D}}{\approx} N(0,1) \end{aligned}$$

其中 $f(Y|\theta)$ 是連續型母體的 pdf 在 Y 的值 (若是離散型母體, 則以機率質量函數 pmf 在 Y 的值 $p(Y|\theta)$ 替換).

註. 以 Z 為樞紐量並將 $\widehat{\theta}$ 代入上式分母中的 θ, 經由整理, 得 $t(\theta)$ 的近似大樣本 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間為

$$
\begin{aligned}
& t(\widehat{\theta}) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\left[\frac{\partial t(\theta)}{\partial\theta}\right]^2 \Big/ nE\left[-\frac{\partial^2 \ln f(Y|\theta)}{\partial\theta^2}\right]} \\
\approx\ & t(\widehat{\theta}) \pm z_{\alpha/2}\cdot \\
& \sqrt{\left[\frac{\partial t(\theta)}{\partial\theta}\right]^2 \Big/ nE\left[-\frac{\partial^2 \ln f(Y|\theta)}{\partial\theta^2}\right]\Bigg|_{\theta=\widehat{\theta}}}
\end{aligned}
$$

例 1. 設隨機變數

$$Y_1, \ldots, Y_n \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Bernoulli}(p)$$

即母體 Y 的 pmf

$$p(y|p) = p^y(1-p)^{1-y},\ y = 0, 1$$

試求母體變異數

$$p(1-p)$$

的 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間.

<解> 首先, 由 §9.7 的例 1, 得 p 的 MLE

$$\widehat{p} = \frac{W}{n},\ W = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

故 $t(p) = p(1-p)$ 的 MLE

$$\widehat{t(p)} = t(\widehat{p}) = \widehat{p}(1-\widehat{p})$$

接著,

$$\frac{\partial t(p)}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}(p-p^2) = 1-2p$$

又由

$$p(y|p) = p^y(1-p)^{1-y}$$

得

$$\ln p(y|p) = y\ln p + (1-y)\ln(1-p)$$

以及

$$\frac{\partial \ln p(y|p)}{\partial p} = \frac{y}{p} - \frac{1-y}{1-p}$$

且

$$\frac{\partial^2 \ln p(y|p)}{\partial p^2} = -\frac{y}{p^2} - \frac{1-y}{(1-p)^2}$$

故

$$\begin{aligned} E\left[-\frac{\partial^2 \ln p(Y|p)}{\partial p^2}\right] &= E\left[\frac{Y}{p^2}+\frac{1-Y}{(1-p)^2}\right] \\ &= \frac{p}{p^2}+\frac{1-p}{(1-p)^2} \\ &= \frac{1}{p}+\frac{1}{1-p}=\frac{1}{p(1-p)} \end{aligned}$$

代入, 得

$$t(p)=p(1-p)$$

的近似 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間為

$$\begin{aligned} & t(\widehat{p}) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\left[\frac{\partial t(p)}{\partial p}\right]^2 \Big/ nE\left[-\frac{\partial^2 \ln p(Y|\theta)}{\partial p^2}\right]\Bigg|_{p=\widehat{p}}} \\ &= \widehat{p}(1-\widehat{p}) \pm z_{\alpha/2} \cdot \\ &\qquad \sqrt{(1-2p)^2 \Big/ n\left[\frac{1}{p(1-p)}\right]\Bigg|_{p=\widehat{p}}} \\ &= \widehat{p}(1-\widehat{p}) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})(1-2\widehat{p})^2}{n}} \end{aligned}$$