單元 20: 動差法
(課本 §9.6)

設 $Y_1, \ldots, Y_n$ 爲一組由含未知參數 $\theta_1, \ldots, \theta_t$ 的母體所取出的隨機樣本. 則 Y_i 的 k 階動差 (kth moment) 爲

$$\mu'_k \stackrel{\text{def}}{=} E(Y_i^k) = E(Y_1^k),\ i = 1, \ldots, n$$

且 k 階樣本動差 (kth sample moment) 爲

$$m'_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i^k$$

動差法的構想乃是基於樣本動差應是對應母體動差的好估計, 步驟爲

1. 設定 $\mu'_1 = m'_1, \mu'_2 = m'_2, \ldots, \mu'_t = m'_t$.

2. 解 $\theta_1, \ldots, \theta_t$.

3. θ_i 的動差估計量 (moment estimator)

$$\widehat{\theta}_i \stackrel{\text{def}}{=} \theta_i \text{ 的解},\ i = 1, \ldots, t$$

例 1. 設隨機變數

$$Y_1, \ldots, Y_n \overset{\text{iid}}{\sim} \text{unif}(0, \theta)$$

試求 θ 的動差估計量.

<解> 首先,

$$\mu_1' = \frac{\theta}{2}$$

且

$$m_1' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \overline{Y}$$

接著, 設定

$$\frac{\theta}{2} = \overline{Y}$$

得

$$\theta = 2\overline{Y}$$

因此, θ 的動差估計量爲 $\widehat{\theta} = 2\overline{Y}$.

註 1. 因爲

$$E(\widehat{\theta}) = 2E(\overline{Y}) = 2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \theta$$

故 $\widehat{\theta}$ 是不偏的.

又由 WLLN,

$$\overline{Y} \xrightarrow{p} E(Y_1) = \frac{\theta}{2}$$

即 $\overline{Y}$ 是 $\frac{\theta}{2}$ 的一致估計量, 且由機率收斂的性質,

$$\hat{\theta} = 2\overline{Y} \xrightarrow{p} 2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \theta$$

即 $\hat{\theta}$ 亦是 θ 的一致估計量.

註 2. 因爲 Y_i 的 pdf

$$f(y_i|\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 < y_i < \theta \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \frac{1}{\theta} I_{(0,\theta)}(y_i)$$

得概似比値

$$\begin{aligned} \frac{L(x_1,\ldots,x_n|\theta)}{L(y_1,\ldots,y_n|\theta)} &= \frac{\prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} I_{(0,\theta)(x_i)}}{\prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} I_{(0,\theta)(y_i)}} \\ &= \frac{I_{(-\infty,\theta)}(x_{(n)}) \cdot I_{(0,\infty)}(x_{(1)})}{I_{(-\infty,\theta)}(y_{(n)}) \cdot I_{(0,\infty)}(y_{(1)})} \end{aligned}$$

不含 θ 若且唯若取

$$g(x_1,\ldots,x_n) = x_{(n)}$$

且

$$x_{(n)} = y_{(n)}$$

因此, 由 Lehmann 與 Scheffé 法, 得

$$Y_{(n)} = \max(Y_1, \ldots, Y_n)$$

是 θ 的最小充分統計量.

或根據分解準則,

$$\begin{aligned} & L(y_1, \ldots, y_n|\theta) \\ = & \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} I_{(0,\theta)}(y_i) \\ = & \frac{1}{\theta^n} I_{(-\infty,\theta)}(y_{(n)}) \cdot I_{(0,\infty)}(y_{(1)}) \end{aligned}$$

乃一純 θ 和 $y_{(n)}$ 的函數與另一純 $y_1, \ldots, y_n$ 的函數的乘積, 得 $Y_{(n)}$ 是一個充分統計量, 亦可導出為一最小充分統計量.

因為 $\widehat{\theta} = 2\overline{Y}$ 不是 $Y_{(n)}$ 的函數, 可能 $\mathrm{Var}(\widehat{\theta})$ 不是最小的, 而事實上, 由例 9.1, 得 $n > 1$ 時,

$$\mathrm{Var}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right) Y_{(n)}\right) = \frac{\theta^2}{n(n+2)} < \frac{\theta^2}{3n} = \mathrm{Var}(\widehat{\theta})$$

例 2. 設隨機變數

$$Y_1, \ldots, Y_n \overset{\text{iid}}{\sim} \text{gamma}(\alpha, \beta)$$

試求 α 與 β 的動差估計量.

<解> 首先,

$$\mu_1' = E(Y_1) = \alpha\beta$$

與

$$\begin{aligned}\mu_2' &= E(Y_1^2) = \mathsf{Var}(Y_1) + [E(Y_1)]^2 \\ &= \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta^2\end{aligned}$$

以及

$$m_1' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

與

$$m_2' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2$$

接著, 設定

$$\alpha\beta = m_1' \tag{1}$$

以及

$$\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta^2 = m_2' \tag{2}$$

由 (1) 式, 得

$$\beta = \frac{m_1'}{\alpha}$$

代入 (2) 式, 得

$$\alpha\left(\frac{m_1'}{\alpha}\right)^2+\alpha^2\left(\frac{m_1'}{\alpha}\right)^2=m_2'$$

整理, 得

$$\frac{(m_1')^2}{\alpha}=m_2'-(m_1')^2$$

故

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{(m_1')^2}{m_2'-(m_1')^2}=\frac{\overline{Y}^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i^2-\overline{Y}^2}\\ &= \frac{n\overline{Y}^2}{\sum_{i=1}^n Y_i^2-n\overline{Y}^2}=\frac{n\overline{Y}^2}{\sum_{i=1}^n(Y_i-\overline{Y})^2}\end{aligned}$$

且代入, 得

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{m_1'}{\alpha}=\overline{Y}\cdot\frac{\sum_{i=1}^n(Y_i-\overline{Y})^2}{n\overline{Y}^2}\\ &= \frac{\sum_{i=1}^n(Y_i-\overline{Y})^2}{n\overline{Y}}\end{aligned}$$

因此, 動差估計量分別爲

$$\hat{\alpha}=\frac{n\overline{Y}^2}{\sum_{i=1}^n(Y_i-\overline{Y})^2}$$

以及

$$\hat{\beta}=\frac{\sum_{i=1}^n(Y_i-\overline{Y})^2}{n\overline{Y}}$$

註 1. 由 WLLN,

$$\overline{Y} \xrightarrow{p} \alpha\beta$$

且

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 \xrightarrow{p} E(Y_1^2) = \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta^2$$

因此, 根據機率收斂的性質,

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= \frac{\overline{Y}^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \overline{Y}^2} \\ &\xrightarrow{p} \frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2} = \alpha\end{aligned}$$

又由上式,

$$\hat{\beta} = \frac{\overline{Y}}{\hat{\alpha}} \xrightarrow{p} \frac{\alpha\beta}{\alpha} = \beta$$

意即 $\hat{\alpha}$ 與 $\hat{\beta}$ 均是一致的.

註 2. 因爲 Y_i 的 pdf

$$f(y_i|\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{y_i^{\alpha-1}e^{-y_i/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}, & 0 < y_i < \infty \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

得概似比值

$$\frac{L(x_1,\ldots,x_n|\alpha,\beta)}{L(y_1,\ldots,y_n|\alpha,\beta)} = \frac{\prod_{i=1}^n \frac{x_i^{\alpha-1}e^{-x_i/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}}{\prod_{i=1}^n \frac{y_i^{\alpha-1}e^{-y_i/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}}$$

$$= \frac{\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\alpha-1}}{\left(\prod_{i=1}^n y_i\right)^{\alpha-1}} \exp\left[-\frac{1}{\beta}\left(\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n y_i\right)\right]$$

不含 α 與 β 若且唯若取

$$g_1(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^n x_i$$

與

$$g_2(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$$

以及

$$\prod_{i=1}^n x_i = \prod_{i=1}^n y_i \text{ 與 } \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$$

因此, 由 Lehmann 與 Scheffé 法, 得

$$\prod_{i=1}^n Y_i \text{ 與 } \sum_{i=1}^n Y_i$$

聯合地形成 α 與 β 的最小充分統計量, 而可能但困難地求得比 $\hat{\alpha}$ 與 $\hat{\beta}$ 更有效率的估計量.