單元 17: 一致性
(課本 §9.3)

投擲一正面機率 p 未知的銅板. 令 Y 爲 n 次投擲中出現正面的次數, 則

$$Y \sim \text{binomial}(n, p)$$

另可採用 $\frac{Y}{n}$ (p 的不偏估計量) 估計 p. 直觀上, 樣本大小 n 愈大, 則樣本比率 (sample proportion) $\frac{Y}{n}$ (乃一隨機變數) 會愈接近 p.

問. 如何將上列敍述以機率的方式表現?

答. 若對任意給定的 $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{Y}{n} - p\right| < \epsilon\right) = 1$$

與直觀相符, 則稱 $\frac{Y}{n}$ 是 p 的一致統計量 (consistent estimator of p) 或稱

$$\frac{Y}{n} \to p \text{ in probability}$$

或稱 $\frac{Y}{n}$ 機率收斂到 p, 並以

$$\frac{Y}{n} \xrightarrow{p} p$$

表示, 參考課本及課程網頁的圖例 9.1 與 9.2.

定義. 若對任意給定的 $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P(|\widehat{\theta}_n - \theta| < \epsilon) = 1$$

或

$$\lim_{n\to\infty} P(|\widehat{\theta}_n - \theta| \geq \epsilon) = 0$$

則稱 $\widehat{\theta}_n$ 是 θ 的一致估計量 (consistent estimator of θ).

註. $\widehat{\theta}_n$ 的下標僅單純地強調 $\widehat{\theta}_n$ 會因樣本大小 n 而定; 在上下文清楚或簡略下, 可省略 n.

定理 1. 令 $\widehat{\theta}_n$ 是 θ 的不偏估計量. 若

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\widehat{\theta}_n) = 0$$

則 $\widehat{\theta}_n$ 是一致的.

<證> 首先, 複習柴比雪夫不等式, 對於任意的 $\epsilon > 0$,

$$P(|Y - E(Y)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(Y)}{\epsilon^2}$$

接著, 因爲 $\widehat{\theta}_n$ 是不偏的, 即 $E(\widehat{\theta}_n)=\theta$, 故, 根據柴比雪夫不等式, 對任意給定的 $\epsilon>0$,

$$\begin{aligned} P(|\widehat{\theta}_n-\theta|\geq\epsilon) &= P(|\widehat{\theta}_n-E(\widehat{\theta}_n)|\geq\epsilon) \\ &\leq \frac{\mathrm{Var}(\widehat{\theta}_n)}{\epsilon^2} \end{aligned}$$

因此, 若

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Var}(\widehat{\theta}_n)=0$$

得

$$\lim_{n\to\infty}P(|\widehat{\theta}_n-\theta|\geq\epsilon)=0$$

且由定義, $\widehat{\theta}_n$ 是 θ 的一致估計量, 亦相當於

$$\widehat{\theta}_n\xrightarrow{p}\theta$$

弱大數法則 (Week Law of Large Numbers, WLLN). 令 $Y_1,\ldots,Y_n$ 獨立同分布且共同的期望值 μ 與變異數 σ^2 均有限. 則樣本期望值

$$\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$$

是 μ 的一致估計量, 即

$$\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i\xrightarrow{p}\mu$$

亦相當於對任意的 $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{Y}-\mu| \geq \epsilon) = 0$$

<證> 因爲 $\overline{Y}$ 是不偏的且

$$\mathrm{Var}(\overline{Y}) = \frac{\sigma^2}{n} \to 0$$

故由定理 1, 得

$$\overline{Y} \xrightarrow{p} \mu$$

即 $\overline{Y}$ 是 μ 的一致估計量.

定理 2. 假設

$$\widehat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta \quad \text{且} \quad \widehat{\theta}'_n \xrightarrow{p} \theta'$$

則

(a) $\widehat{\theta}_n \pm \widehat{\theta}'_n \xrightarrow{p} \theta \pm \theta'$

廣義地, 若 $a_n \to a$ 且 $b_n \to b$, 則

$$a_n\widehat{\theta}_n \pm b_n\widehat{\theta}'_n \xrightarrow{p} a\theta \pm b\theta'$$

(b) $\widehat{\theta}_n\widehat{\theta}'_n \xrightarrow{p} \theta\theta'$

(c) 在 $\theta' \neq 0$ 下, $\widehat{\theta}_n/\widehat{\theta}'_n \xrightarrow{p} \theta/\theta'$

(d) 在 $P(\widehat{\theta}_n \geq 0) = 1$ 下, $\sqrt{\widehat{\theta}_n} \xrightarrow{p} \sqrt{\theta}$

廣義地, 若實數值函數 $g(\cdot)$ 在 θ 連續, 則

$$g(\widehat{\theta}_n) \xrightarrow{p} g(\theta)$$

例 1. 設 $Y_1, \ldots, Y_n$ 獨立同分布且共同的 $\mu = E(Y_i)$, $E(Y_i^2)$ 與 $E(Y_i^4)$ 均有限, 則樣本變異數

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2$$

是母體變異數 σ^2 的一致估計量.

<證> 首先, 展開並根據 $\sum_{i=1}^{n} Y_i = n\overline{Y}$, 得

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - 2\overline{Y}\sum_{i=1}^{n} Y_i + n\overline{Y}^2\right) \\ &= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - n\overline{Y}^2\right) \\ &= \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \overline{Y}^2\right) \qquad (1) \end{aligned}$$

接著, 因爲 $E(Y_i) < \infty$ 與 $E(Y_i^2) < \infty$, 得

$$\text{Var}(Y_i) < \infty$$

且由 WLLN, 得

$$\overline{Y} \xrightarrow{p} \mu$$

再由定理 2 的 (b), 得

$$\overline{Y}^2 = (\overline{Y})(\overline{Y}) \xrightarrow{p} \mu^2 \tag{2}$$

同理, 因爲 $E(Y_i^2) < \infty$ 與

$$E((Y_i^2)^2) = E(Y_i^4) < \infty$$

得

$$\text{Var}(Y_i^2) < \infty$$

並且由 WLLN, 得

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 \xrightarrow{p} E(Y_i^2) \tag{3}$$

再由 (2) 式與 (3) 式及定理 2 的 (a), 得

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \overline{Y}^2 \xrightarrow{p} E(Y_i^2) - \mu^2 = \sigma^2 \tag{4}$$

最後, 因爲

$$\frac{n}{n-1} \to 1$$

故由 (1) 式與 (4) 式與定理 2 (a) 的推廣, 得

$$S^2 = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \overline{Y}^2\right) \xrightarrow{p} (1)\sigma^2 = \sigma^2$$

即, S^2 是 σ^2 的一致估計量.

接著, 探討大樣本信賴區間的依據.

複習. 設 $Y_1, \ldots, Y_n$ 爲一隨機樣本且共同的 μ 與 σ^2 均有限. 根據 CLT, 得

$$\frac{\overline{Y} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$$

由此導出, 當 n 夠大時,

$$\begin{aligned} P\left(-z_{\alpha/2} \le \frac{\overline{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le z_{\alpha/2}\right) & \\ \approx\ & P(-z_{\alpha/2} \le Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha \end{aligned}$$

其中 $Z \sim N(0,1)$ 且 $P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$.

整理, 得

$$P\left(\overline{Y} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{Y} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \approx 1 - \alpha$$

因此, μ 的信賴係數爲 $1-\alpha$ 的信賴區間爲

$$\overline{Y} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\sigma \text{ 已知時})$$

註. 若 σ 未知, 則以 S^2 近似 σ^2, 得信賴係數爲 $1-\alpha$ 的信賴區間爲

$$\overline{Y} \pm z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

問. 爲何有這種近似?

答. 可由下述結果驗證.

定理 3 (Slutsky's 定理的特例). 假設當 $n \to \infty$ 時,

$$U_n \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$$

且

$$W_n \xrightarrow{p} 1$$

時, 則當 $n \to \infty$ 時,

$$U_n/W_n \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$$

例 2. 設 $Y_1,\ldots,Y_n$ 獨立同分布且共同的

$$\mu = E(Y_i)$$

與

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(Y_i)$$

均有限, 則

$$\frac{\overline{Y}-\mu}{S/\sqrt{n}} = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{Y}-\mu}{S}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$$

<證> 首先, 由 CLT, 得

$$\frac{\overline{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1) \tag{5}$$

接著, 由例 1,

$$S^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$$

即 S^2 是 σ^2 的一致估計量, 以及定理 2, 得

$$\frac{S}{\sigma} = \sqrt{\frac{S^2}{\sigma^2}} \xrightarrow{p} \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sigma^2}} = 1 \tag{6}$$

最後, 根據 (5) 式與 (6) 式以及定理 3 (或稱作 Slutsky's 定理), 得

$$\left.\frac{\overline{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right/\frac{S}{\sigma} = \frac{\overline{Y}-\mu}{S/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$$

得證.

註 1. 因爲

$$\frac{\overline{Y}-\mu}{S/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$$

故 μ 的信賴係數爲 $1-\alpha$ 的信賴區間可取爲

$$\overline{Y} \pm z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

其中 $P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ 且 $Z \sim N(0,1)$.

註 2. 令 $X_1, \ldots, X_n$ 是成功機率爲 p 的 Bernoulli 試驗. 則

$$Y \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{binomial}(n,p)$$

且 $\widehat{p} = \frac{Y}{n}$ 是 p 的不偏估計量以及 $\sigma^2_{\widehat{p}} = \frac{pq}{n}$, 故由 CLT, 得

$$\frac{\widehat{p}-p}{\sqrt{pq/n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1) \tag{7}$$

接著, 由 WLLN,

$$\widehat{p} \xrightarrow{p} E(X_i) = p$$

並由定理 2, 得

$$\widehat{q} \overset{\text{def}}{=} 1-\widehat{p} \xrightarrow{p} 1-p=q$$

以及

$$\widehat{p}\widehat{q} \xrightarrow{p} pq$$

由此再根據定理 2, 得

$$\sqrt{\frac{\widehat{p}\widehat{q}}{pq}} \xrightarrow{p} \sqrt{\frac{pq}{pq}} = 1 \tag{8}$$

最後, 由 (7) 式與 (8) 式以及 Slutsky's 定理, 得

$$\frac{\widehat{p}-p}{\sqrt{pq/n}} \Bigg/ \sqrt{\frac{\widehat{p}\widehat{q}}{pq}} = \frac{\widehat{p}-p}{\sqrt{\widehat{p}\widehat{q}/n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$$

因此, p 的信賴係數爲 $1-\alpha$ 的信賴區間爲

$$\widehat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}\widehat{q}}{n}}$$

其中 $P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ 且 $Z \sim N(0,1)$.