單元 16: 相對效率
(課本 §9.2)

令 θ 為目標參數, 且 $\widehat{\theta}_1$ 與 $\widehat{\theta}_2$ 分別為 θ 的二個不偏估計量, 它們的 pdf 如圖示. 明顯地, $\widehat{\theta}_2$ 較優.

問. 如何找一較優的估計量?

答. 比較 $\widehat{\theta}_1$ 與 $\widehat{\theta}_2$ 的變異性, 即比較 $\text{Var}(\widehat{\theta}_1)$ 與 $\text{Var}(\widehat{\theta}_2)$, 如上圖.

如何比較? 一可行的方法為計算 $\text{Var}(\widehat{\theta}_1)$ 與 $\text{Var}(\widehat{\theta}_2)$ 的比值 (ratio), 如下述的定義.

定義. 對於 θ 的不偏估計量 $\widehat{\theta}_1$ 與 $\widehat{\theta}_2$, $\widehat{\theta}_1$ 相對於 $\widehat{\theta}_2$ 的效率 (efficiency of $\widehat{\theta}_1$ relative to $\widehat{\theta}_2$) 定義為

$$\text{eff}(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2) = \frac{\text{Var}(\widehat{\theta}_2)}{\text{Var}(\widehat{\theta}_1)}$$

註 1. 若 $\text{eff}(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2) > 1$, 則 $\widehat{\theta}_1$ 較優.

註 2. 若 $\text{eff}(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2) < 1$, 則 $\widehat{\theta}_2$ 較優.

例 1. 設隨機樣本

$$Y_1, \ldots, Y_n \overset{\text{iid}}{\sim} \text{unif}(0, \theta)$$

令

$$\widehat{\theta}_1 = 2\overline{Y}$$

且

$$\widehat{\theta}_2 = \left(\frac{n+1}{n}\right) Y_{(n)}$$

其中

$$Y_{(n)} = \max(Y_1, \ldots, Y_n)$$

試證 $\widehat{\theta}_1$ 與 $\widehat{\theta}_2$ 均為 θ 的不偏估計量並計算 $\widehat{\theta}_1$ 相對於 $\widehat{\theta}_2$ 的效率 $\text{eff}(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2)$.

<解> 經由計算, 得

$$\text{Var}(\widehat{\theta}_1) = \frac{\theta^2}{3n} \quad \text{與} \quad \text{Var}(\widehat{\theta}_2) = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

故, 根據定義,

$$\begin{aligned}
\text{eff}(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2) &= \frac{\text{Var}(\widehat{\theta}_2)}{\text{Var}(\widehat{\theta}_2)} = \frac{\theta^2}{n(n+2)} \cdot \frac{3n}{\theta^2} \\
&= \frac{3}{n+2} \quad (< 1, \text{ 當 } n > 1)
\end{aligned}$$

因此, 對於 $n > 1$, 作爲 θ 的不偏估計量, $\widehat{\theta}_2$ 優於 $\widehat{\theta}_1$, 與直觀相符, 因爲 θ 爲區間 $(0, \theta)$ 的右端點, 故以樣本中的最大值估計 $Y_{(n)}$ 的稍大微調量 $\left(\frac{n+1}{n}\right)Y_{(n)}$ 估計 θ 應比樣本期望值 (不一定會是 $\frac{\theta}{2}$) 的二倍 $2\overline{Y}$ 來得自然及較小的樣本中訊息間的干擾.