

單元 14: σ^2 的信賴區間 (課本 §8.9)

在 μ 與 σ^2 均未知的條件下, σ^2 的信賴區間.

設 $Y_1, \dots, Y_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$. 因為

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

不因 σ^2 而定, 故可作為 σ^2 的樞紐量.

接著, 選取 $\chi^2_{1-\alpha/2}$ 與 $\chi^2_{\alpha/2}$ 使得

$$P(\chi^2_{1-\alpha/2} \leq \chi^2(n-1) \leq \chi^2_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

如圖示. 經由整理, 得

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P\left(\chi^2_{1-\alpha/2} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{\alpha/2}\right) \\ &= P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\right) \end{aligned}$$

因此, σ^2 的信賴係數為 $1 - \alpha$ 的信賴區間為

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\right)$$

例 1. 欲檢測某種度量聲源儀器的變異性. 今針對某聲源測得三個相互獨立的度量值為 4.1, 5.2 與 10.2. 試在信賴係數 0.90 下, 估計 σ^2 .

<解> 在常態分布的假設下, 一 90% ($\alpha/2 = 0.05$) 信賴區間為

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{0.05}^2}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{0.95}^2} \right)$$

又 $S^2 = 10.57$, $n = 3$ 且由表 6 得

$$P(\chi^2(2) > 5.991) = 0.05$$

以及

$$P(\chi^2(2) > 0.103) = 0.95$$

如圖示, 故

$$\chi_{0.05}^2 = 5.991 \text{ 且 } \chi_{0.95}^2 = 0.103$$

以及 σ^2 的信賴區間為

$$\left(\frac{2(10.57)}{5.991}, \frac{2(10.57)}{0.103} \right) = (3.53, 205.24)$$

相當地寬, 因為 $n = 3$ 太小之故.

或 R:

```
y = scan() # 輸入資料
n = length(y)
s2 = var(y)
chi2_l = qchisq(0.05, df=n-1)
chi2_u = qchisq(0.95, df=n-1)
theta_l = (n-1)*s2/chi2_u
theta_u = (n-1)*s2/chi2_l
cat('sigma^2 的 90% 信賴區間爲 (', theta_l,
',', theta_u, ')', '\n')
```