單元 11: 大樣本信賴區間
(課本 §8.6)

首先, §8.3 的複習:

(i) 設 $Y_1, \ldots, Y_n$ 爲大小是 n 的隨機樣本且 $E(Y_i) = \mu$ 以及 $\text{Var}(Y_i) = \sigma^2$. 若目標參數 $\theta = \mu$, 則

$$\widehat{\theta} = \overline{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

且 $E(\widehat{\theta}) = \theta$ (不偏的) 以及 $\sigma^2_{\widehat{\theta}} = \frac{\sigma^2}{n}$.

(ii) 設 $X_1, \ldots, X_n$ 爲成功機率是 p 的 Bernoulli 試驗. 若 $\theta = p$, 則

$$\widehat{\theta} = \frac{Y}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

且 $E(\widehat{\theta}) = p$ (不偏的) 以及 $\sigma^2_{\widehat{\theta}} = \frac{pq}{n}$.

(iii) 設 $Y_{11}, \ldots, Y_{1n_1}$ 是大小爲 n_1 的隨機樣本且 $E(Y_{1i}) = \mu_1$ 以及 $\text{Var}(Y_{1i}) = \sigma_1^2$;

$Y_{21}, \ldots, Y_{2n_2}$ 是大小爲 n_2 的隨機樣本且 $E(Y_{2i}) = \mu_2$ 以及 $\text{Var}(Y_{2i}) = \sigma_2^2$; 又此二樣本亦相互獨立. 若 $\theta = \mu_1 - \mu_2$, 則

$$\hat{\theta} = \overline{Y}_1 - \overline{Y}_2 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} Y_{1i} - \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} Y_{2i}$$

且 $E(\hat{\theta}) = \theta$ (不偏的) 以及 $\sigma_{\hat{\theta}}^2 = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$.

(iv) 設 $X_{11}, \ldots, X_{1n_1}$ 是成功機率爲 p_1 的 Bernoulli 試驗; $X_{21}, \ldots, X_{2n_2}$ 是成功機率爲 p_2 的 Bernoulli 試驗; 又它們間亦相互獨立. 若 $\theta = p_1 - p_2$, 則

$$\hat{\theta} = \frac{Y_1}{n_1} - \frac{Y_2}{n_2} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i} - \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}$$

且 $E(\hat{\theta}) = \theta$ 且 $\text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}$.

列表簡記成

θ	μ	p	$\mu_1 - \mu_2$	$p_1 - p_2$
$\hat{\theta}$	$\overline{Y}$	$\frac{Y}{n}$	$\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2$	$\frac{Y_1}{n_1} - \frac{Y_2}{n_2}$
$\sigma_{\hat{\theta}}^2$	$\frac{\sigma^2}{n}$	$\frac{pq}{n}$	$\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$	$\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}$

其中估計量均爲不偏估計量, 且

$$Y \sim \text{binomial}(n, p)$$

以及

$$Y_1 \sim \text{binomial}(n_1, p_1),\ Y_2 \sim \text{binomial}(n_2, p_2)$$

則由極限定理, 當 n (或 n_1 與 n_2) $\to \infty$ 時,

$$\frac{\widehat{\theta} - \theta}{\sigma_{\widehat{\theta}}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 1)$$

註 1. 在大樣本下, 求信賴係數爲 $1 - \alpha$ 的 θ 的信賴區間的方法如下述. 當 n (或 n_1 與 n_2) 夠大時,

$$\frac{\widehat{\theta} - \theta}{\sigma_{\widehat{\theta}}} \overset{\mathcal{D}}{\approx} N(0, 1)$$

可作爲樞紐量, 當 $\sigma_{\widehat{\theta}}$ 不含 θ 時. 令

$$Z \sim N(0, 1)$$

且 $z_{\alpha/2}$ 滿足

$$P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

如圖示, 則當 n (或 n_1 與 n_2) $\to \infty$ 時,

$$\frac{\widehat{\theta} - \theta}{\sigma_{\widehat{\theta}}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 1)$$

且

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\widehat{\theta}-\theta}{\sigma_{\widehat{\theta}}} < z_{\alpha/2}\right) \approx P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

由此導出,

$$P(\widehat{\theta} - z_{\alpha/2}\sigma_{\theta} < \theta < \widehat{\theta} + z_{\alpha/2}\sigma_{\widehat{\theta}}) \approx 1-\alpha$$

因此, 可選取

$$(\widehat{\theta} - z_{\alpha/2}\sigma_{\widehat{\theta}}, \widehat{\theta} + z_{\alpha/2}\sigma_{\widehat{\theta}})$$

作爲 θ 的信賴係數爲 $1-\alpha$ 的信賴區間, 其中

$$\widehat{\theta} - z_{\alpha/2}\sigma_{\widehat{\theta}}$$

爲下信賴界限 (lower confidence limit, LCL) 且

$$\widehat{\theta} + z_{\alpha/2}\sigma_{\widehat{\theta}}$$

爲上信賴界限 (upper confidence limit, UCL).

註 2. 若 σ^2 未知, 可用 S^2 近似 σ^2. 若 p 未知, 可用 $\widehat{p} = \frac{y}{n}$ 近似 p.

例 1. 設一超商隨機選取 64 位顧客並記錄他們的購物時間. 若此樣本的平均購物時間爲 33 分且變異數爲

256 分^2, 試估計信賴係數為 $1-\alpha=0.90$ 的眞正平均購物時間 μ.

<解> 眞正平均購物時間 μ 的近似 90% 信賴區間為

$$\begin{aligned}\left(33-1.645\cdot\frac{16}{8},33+1.645\cdot\frac{16}{8}\right)\\ &= (29.71,36.29)\end{aligned}$$

意謂著並不知道此一區間是否包含 μ, 但在重複選取大小為 $n=64$ 的樣本下, 所得的信賴區間

$$\left(\overline{Y}-1.645\frac{S}{\sqrt{n}},\overline{Y}+1.645\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

中, 將有近似 90% 的比率會包含 μ.

例 2. 由 A 品牌的冰箱中隨機選出 $n_1=50$ 台, 得 12 台在保固期內故障; 由 B 品牌的冰箱中隨機選出 $n_2=60$ 台, 得 12 台在保固期內故障. 試在信賴係數 $1-\alpha=0.98$ 下, 估計此二品牌在保固期內故障率的差.

<解> 因為 $n_1=50$, $n_2=60$ 夠大, 故

$$\theta=p_1-p_2$$

的信賴區間可選為

$$(\widehat{\theta}-z_{\alpha/2}\sigma_{\widehat{\theta}},\widehat{\theta}+z_{\alpha/2}\sigma_{\widehat{\theta}})$$

其中

$$\widehat{\theta} = \widehat{p}_1 - \widehat{p}_2 \text{ 且 } \sigma^2_{\widehat{\theta}} = \frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}$$

因爲 p_1 與 p_2 未知, 故

$$\sigma^2_{\widehat{\theta}} \approx \frac{\widehat{p}_1 \widehat{q}_1}{n_1} + \frac{\widehat{p}_2 \widehat{q}_2}{n_2}$$

且近似 98% 信賴界限爲

$$\begin{aligned} & (0.24 - 0.20) \\ & \quad \pm 2.33 \sqrt{\frac{(0.24)(0.76)}{50} + \frac{(0.20)(0.80)}{60}} \\ = & \quad 0.04 \pm 0.1852 \end{aligned}$$

因此, 一個近似 98% 信賴區間爲

$$(-0.1452, 0.2252)$$

例 3. 期望值 μ 的大樣本區間估計量的效能經驗探討. 探討由 exp(10) 母體隨機選取大小 $n = 100$ 的樣本以及信賴係數 $1 - \alpha = 0.95$ 的模擬結果. 因爲 $\alpha = 0.05$, 令

$$z_{\alpha/2} = \texttt{qnorm}(0.975)$$

得 95% 信賴區間為

$$\left(\overline{Y} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{Y} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$
$$\approx \left(\overline{Y} - z_{\alpha/2}\frac{S}{10}, \overline{Y} + z_{\alpha/2}\frac{S}{10}\right)$$

因為 σ 未知且 $n = 100$ 夠大, 此近似是必要且合理的.

經由模擬結果 (課程網頁中模擬信賴區間的 R 指令檔), 得 100 組樣本所得的 100 個信賴區間中, 含 $\mu = 10$ 的約為 95 個左右, 符合 $1 - \alpha = 0.95$ 的意義.