

單元 10: 信賴區間

(課本 §8.5)

樣本經由區間估計量得二值 $\hat{\theta}_L$ 與 $\hat{\theta}_U$ 使得固定未知的參數 θ 會落入區間 $(\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U)$ 內, 此處 $\hat{\theta}_L$ 與 $\hat{\theta}_U$ 為二隨機量 (random quantities). 故需要求

(i) $P(\hat{\theta}_L < \theta < \hat{\theta}_U)$ 是高的.

(ii) $\hat{\theta}_U - \hat{\theta}_L$ 是相對地小.

一些慣用法 (conventions, 約定):

(1) 區間估計量乃相當於信賴區間.

(2) $\hat{\theta}_U$ 稱作上信賴界限 (upper confidence limit);
 $\hat{\theta}_L$ 稱作下信賴界限 (lower confidence limit).

(3) $P(\hat{\theta}_L < \theta < \hat{\theta}_U)$ 稱作信賴係數 (confidence coefficient), 例如, 若

$$P(\hat{\theta}_L < \theta < \hat{\theta}_U) = 1 - \alpha$$

則 $1 - \alpha$ 稱作信賴係數.

若某一特定估計量的信賴係數是高的話, 則可**高度地確信**, 由單一抽樣並根據此估計量所得的信賴區間會包含 θ .

(4) $(\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U)$ 稱作雙邊信賴區間 (two-sided confidence interval).

(5) 兩個單邊 (one-sided) 信賴區間分別為

$$(\hat{\theta}_L, \infty)$$

意即, 若信賴係數為 $1 - \alpha$ 時,

$$P(\hat{\theta}_L < \theta) = 1 - \alpha$$

以及

$$(-\infty, \hat{\theta}_U)$$

意即, 若信賴係數為 $1 - \alpha$ 時,

$$P(\theta < \hat{\theta}_U) = 1 - \alpha$$

樞紐法 (pivotal method). 一個求 θ 的信賴區間的方法為, 選取一樞紐量 (pivotal quantity) 使得

- (1) 此樞紐量是 Y_1, \dots, Y_n 以及僅此未知參數 θ 的函數.
- (2) 此樞紐量的分布不會因 θ 而定 (不取決於 θ , not depending on θ).

例 1. 設

$$\text{母體} \sim \exp(\theta)$$

且 Y 爲由此母體選取的單一樣本 (大小爲一). 試以 Y 形成一個信賴係數爲 0.90 的 θ 的信賴區間.

<解> 信賴區間

$$(\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U) = \left(\frac{Y}{2.996}, \frac{Y}{0.51} \right)$$

將有 90% 的比率在重複由指數分布母體選取單一樣本 Y 下, 包含 θ .

例 2. 設 Y 爲一由 $\text{unif}(0, \theta)$ 取樣且大小 $n = 1$ 的隨機樣本. 試求 θ 的 95% 下信賴界限 (lower confidence bound).

<解> 信賴區間

$$(\hat{\theta}_L, \infty) = \left(\frac{Y}{0.95}, \infty \right)$$

將在重複由 $\text{unif}(0, \theta)$ 母體選取單一樣本 Y 下, 有 95% 的比率包含 θ .