

補充單元練習題 4: 曲面面積

一. 試求下列各項由 $z = f(x, y)$ 在區域 R 上所形成曲面的面積. (提示: 某些積分在極座標中較易計算)

1. $f(x, y) = 8 + 2x + 2y$

$$R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

解. 12π

2. $f(x, y) = 2 + x^{3/2}$

R : 以 $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(3, 4)$, 與 $(3, 0)$ 為端點的長方形

解. $\frac{4}{27}(31\sqrt{31} - 8)$

3. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$R = \{(x, y) : 0 \leq f(x, y) \leq 1\}$$

解. $\sqrt{2}\pi$

二. 試求下列各曲面的面積.

1. 在第一卦限中的拋物體 $z = 16 - x^2 - y^2$

解. $\frac{\pi}{24}(65\sqrt{65} - 1)$

2. 在圓柱 $x^2 + y^2 = 1$ 內的圓錐 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

解. $\sqrt{2}\pi$

3. 在第一卦限內的平面 $z = 24 - 3x - 2y$

解. $48\sqrt{14}$

三. 試列出下列各項由函數 f 在區域 R 上的圖形所形成的曲面面積的二重積分.

1. $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$

R : 以 $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, 與 $(1, -1)$ 為端點的長方形

解.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{1 + 9(x^2 - y)^2 + 9(y^2 - x)} dy dx$$

$$2. f(x, y) = e^{-x} \sin y$$

$$R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$\text{解. } \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{1 + e^{-2x}} dy dx$$

四. 試求兩圓柱 $x^2 + z^2 = 1$ 與 $y^2 + z^2 = 1$ 的交集所形成實體的表面積. 解. 16

五. 試證圓錐

$$z = k\sqrt{x^2 + y^2}, k > 0$$

在 xy 平面的圓形區域 $x^2 + y^2 \leq r^2$ 上所形成的曲面面積為

$$\pi r^2 \sqrt{k^2 + 1}$$