

補充單元練習題 2: 二重積分與體積

一. 試繪出下列各項的積分區域 R , 並計算二重積分

$$\iint_R f(x, y) dA$$

1. $\int_0^\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^2 y \, dy dx$ 解. $\frac{\pi^2}{8}$

2. $\int_0^6 \int_{y/2}^3 (x + y) \, dx dy$ 解. 36

3. $\int_0^1 \int_{y-1}^0 e^{x+y} \, dx dy + \int_0^1 \int_0^{1-y} e^{x+y} \, dx dy$
解. $\frac{1}{2}(e + e^{-1})$

二. 試將下列各項二重積分表成兩種不同積分順序的逐次積分, 並以方便的順序計算出在區域 R 上的二重積分.

1. $\iint_R xy \, dA;$

R : 以 $(0, 0)$, $(0, 5)$, $(3, 5)$, 與 $(3, 0)$ 為端點的長方形.

$$\text{解. } \int_0^5 \int_0^3 xy dx dy = \int_0^3 \int_0^5 xy dy dx = \frac{225}{4}$$

2. $\iint_R \frac{y}{x^2 + y^2} dA;$

R : 由 $y = x$, $y = 2x$, 與 $x = 2$ 所圍出的三角形.

解.

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \int_{y/2}^y \frac{y}{x^2 + y^2} dx dy + \\ & \int_2^4 \int_{y/2}^2 \frac{y}{x^2 + y^2} dx dy \\ & = \int_0^2 \int_x^{2x} \frac{y}{x^2 + y^2} dy dx = \ln \left(\frac{5}{2} \right) \end{aligned}$$

3. $\iint_R x dA;$

R : 在第一象限內, 由 $y = \sqrt{25 - x^2}$, $3x - 4y = 0$, 以及 $y = 0$ 所圍出的扇形.

解.

$$\begin{aligned} & \int_0^4 \int_0^{3x/4} x dy dx + \\ & \int_4^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} x dy dx \\ & = \int_0^3 \int_{4y/3}^{\sqrt{25-y^2}} x dx dy = 25 \end{aligned}$$

三. 試以二重積分求下列各實體的體積.

1. 在第一卦限內由平面 $2x + 3y + 4z = 12$ 所圍出的實體. 解. 12

2. 在第一卦限內由曲面 $z = 1 - xy$, 平面 $y = x$, 以及平面 $y = 1$ 所圍出的實體. 解. $\frac{3}{8}$

四. 試計算下列各項逐次積分. (提示: 需交換積分順序)

1. $\int_0^1 \int_{y/2}^{1/2} e^{-x^2} dx dy$ 解. $1 - e^{-1/4}$

$$2. \int_0^{\ln 10} \int_{e^x}^{10} \frac{1}{\ln y} dy dx \quad \text{解. } 9$$

$$3. \int_0^1 \int_0^{\arccos y} \sin x \sqrt{1 + \sin^2 x} dx dy$$

$$\text{解. } \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$$