補充單元 6: 變數變換

一. 複習

給定單變數定積分

$$\int_a^b f(x)dx$$

設 $x = g(u)$ 爲一由 u-數線上 $[c, d]$ 區間到 x-數線上 $[a, b]$ 區間的一對一 (1-1) 及映成 (onto) 函數, 如圖示, 且 $g'(u)$ 在 $[c, d]$ 上連續, 則

$$dx = g'(u)du$$

以及

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)du$$

其中 $g'(u)$ 稱作放大率, 此乃因爲透過 $x = g(u)$ 所得出的 $[c, d]$ 與 $[a, b]$ 的對應分割中, 根據均值定理, 得 x-數線上子區間的長度

$$\begin{aligned}
\Delta x_i &= x_i - x_{i-1} \\
&= g(u_i) - g(u_{i-1}) \\
&= g'(c_i)(u_i - u_{i-1}) \\
&= g'(c_i)\Delta u_i
\end{aligned}$$

爲 u-數線上子區間長度的 $g'(c_i)$ 倍, 亦即, $g'(c_i)$ 爲長度放大率, 其中 c_i 介於 u_{i-1} 與 u_i 間, 如圖示.

例 1. 試求定積分

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$$

<解> 令 $x = e^u$ 爲一由 u-數線上 $[0,1]$ 區間到 x-數線上 $[1,e]$ 區間的一對一及映成函數, 如圖示, 則

$$dx = e^u du$$

以及

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx &= \int_0^1 \frac{\ln(e^u)}{e^u}e^u du \\ &= \int_0^1 u du = \frac{1}{2}u^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

註 1. 例 1 的作法就相當於之前的代入法, 亦即, 令

$$u = \ln x \ \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$$

以及

$$x = 1 \ \Rightarrow \ u = \ln 1 = 0$$

和

$$x = e \;\Rightarrow\; u = \ln e = 1$$

得

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \int_0^1 udu = \frac{1}{2}u^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

註 2. 使用變數變換或代入法的目的乃在於將原先在 x-數線上較複雜的被積函數或積分區間改成在 u-數線上較易處理的積分.

二. 推廣

給定雙變數二重積分

$$\iint_R f(x,y)dA$$

設 $T(u,v)$ 爲一由 uv-平面上區域 S 到 xy-平面上區域 R 的轉換, 且

$$(x,y) = T(u,v) = (g(u,v), h(u,v))$$

亦即,

$$x = g(u,v),\;\; y = h(u,v)$$

使得 T 是一對一, 映成, 以及 g_u, g_v, h_u, h_v 在 S 上連續, 如圖示, 則

$$\begin{aligned}&\iint_R f(x,y)dA\\ &= \iint_S f(g(u,v),h(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv \quad (1)\end{aligned}$$

其中

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

稱作 x, y 對應於 u, v 的Jacobian, 亦爲面積放大率, 如圖示.

註. 雙變數變數變換的公式爲

$$x = g(u,v),\ \ y = h(u,v),\ \ dA = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

其目的乃是將原先在 xy-平面上較複雜的被積函數或積分區域改成在 uv-平面上較易處理的積分.

例 2. 設 $x = r\cos\theta$ 且 $y = r\sin\theta$, 則可將 $r\theta$-平面上的垂直或水平簡單區域

$$S : \begin{cases} \alpha \le \theta \le \beta \\ a \le r \le b \end{cases}$$

映射至 xy-平面上的 θ-簡單區域

$$R: \begin{cases} \alpha \le \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \le \beta \\ a \le \sqrt{x^2+y^2} \le b \end{cases}$$

如圖示, 且 Jacobian

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} &= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} \\ &= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r \end{aligned}$$

因此, 根據 (1) 式, 在 xy-平面中 θ-簡單區域 R 上的二重積分

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta){\color{red}r}drd\theta$$

乃一在 $r\theta$-平面中垂直或水平簡單區域 S 上的二重積分, 也就是極坐標型式的變數變換.

註 1. 柱面坐標. 設點 P 的直角坐標爲

$$P(x,y,z)$$

對應的柱面坐標爲

$$P(r,\theta,z)$$

則它們之間的關係爲

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad \text{以及} \quad \begin{cases} 0 \le r < \infty \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ -\infty < z < \infty \end{cases}$$

如圖示, 且將柱面坐標系統 $r\theta z$-空間中的實體 W 映射至直角座標系統 xyz-空間中的實體 Q, 以及 Jacobian

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} &= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1\cdot(r\cos^2\theta + r\sin^2\theta) = r > 0
\end{aligned}
$$

因此, 根據 (1) 式, 在 xyz-空間中實體 Q 上的三重積分

$$
\begin{aligned}
&\iiint_Q f(x,y,z)dV \\
&= \iiint_W f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\, dr d\theta dz
\end{aligned}
$$

乃一在柱面座標系統 $r\theta z$-空間中實體 W 上的三重積分.

註 2. 球面坐標. 設點 P 的直角坐標為

$$P(x,y,z)$$

對應的球面坐標為

$$P(\rho,\phi,\theta)$$

則它們之間的關係為

$$
\begin{cases} x = \rho\sin\phi\cos\theta \\ y = \rho\sin\phi\sin\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}
\quad \text{以及} \quad
\begin{cases} 0 \le \rho < \infty \\ 0 \le \phi \le \pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}
$$

如圖示, 且將球面坐標系統 $\rho\phi\theta$-空間中的實體 W 映射至直角坐標系統 xyz-空間中的實體 Q, 以及 Jacobian

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} \\
= &\begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \end{vmatrix} \\
= &\cos\phi\left(\rho^2\sin\phi\cos\phi\cos^2\theta + \right. \\
&\qquad\left.\rho^2\sin\phi\cos\phi\sin^2\theta\right) + \\
&\qquad\rho\sin\phi\left(\rho\sin^2\phi\cos^2\theta + \rho\sin^2\phi\sin^2\theta\right) \\
= &\rho^2\sin\phi\cos^2\phi + \rho^2\sin^3\phi \\
= &\rho^2\sin\phi\left(\cos^2\phi + \sin^2\phi\right) = \rho^2\sin\phi > 0
\end{aligned}$$

因此, 根據 (1) 式, 在 xyz-空間中實體 Q 上的三重積分

$$\begin{aligned}
&\iiint_Q f(x,y,z)dV \\
= &\iiint_W f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\cdot \\
&\qquad \rho^2\sin\phi\, d\rho d\phi d\theta
\end{aligned}$$

乃一在球面坐標系統 $\rho\phi\theta$-空間中實體 W 上的三重積分.

註 3. 柱面坐標型式變數變換的體積放大率爲 r; 球面坐標型式變數變換的體積放大率爲 $\rho^2\sin\phi$.

例 3. 試求直角坐標的二重積分

$$\iint_R 4(x+y)e^{(x-y)}dA$$

其中 R 乃是一個以 $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$, $(-1,1)$ 爲端點的四邊形所圍成的區域.

<解> 根據區域 R 的圖形, R 的邊界乃由四條直線

$$\begin{aligned} y-x &= 0 \\ y-x &= 2 \\ y+x &= 0 \\ y+x &= 2 \end{aligned}$$

所組成, 並非單一的垂直或水平簡單區域, 而是由兩個垂直或水平簡單區域的聯集, 故原式需由兩個對應的逐次積分計算出, 不夠簡潔. 一個可行的方法爲透過變數變數, 將其改成在 uv-平面中較簡單區域上的積分. 根據上述 R 的邊界或被積函數, 令

$$u = y+x \tag{2}$$

$$v = y-x \tag{3}$$

可得出 uv-平面中對應的區域

$$S : \begin{cases} 0 \le u \le 2 \\ 0 \le v \le 2 \end{cases}$$

乃一垂直或水平簡單區域. 接著, 解 x 與 y. 由 (2) 式加 (3) 式, 得

$$y = \frac{1}{2}(u+v)$$

將其代入 (2) 式, 得

$$x = \frac{1}{2}(u-v)$$

因此,

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}(u-v) \\ y = \frac{1}{2}(u+v) \end{array}\right. : S \to R$$

爲一對一, 映成的轉換, 如圖示. 又 Jacobian

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

所以, 根據 (1) 式, 經由變數變換公式

$$x = \frac{1}{2}(u-v),\ y = \frac{1}{2}(u+v),\ dA = \left|\frac{1}{2}\right| dudv$$

得 xy-平面中區域 R 上的二重積分

$$\begin{aligned} \iint_R 4(x+y)e^{(x-y)}dA &= \iint_S 4ue^{-v} \cdot \frac{1}{2}dudv \\ &= \iint_S 2ue^{-v}dudv \end{aligned}$$

一個在 uv-平面中區域 S 上的二重積分. 再根據 S 的

垂直表示法以及 Fubini 定理, 由上式得

$$\begin{aligned}\iint_R 4(x+y)e^{x-y}dA &= 2\int_0^2\int_0^2 ue^{-v}dvdu \\ &= 2\int_0^2 -ue^{-v}\Big|_{v=0}^2 du \\ &= 2\int_0^2 u\left(1-e^{-2}\right)du \\ &= \left(1-e^{-2}\right)u^2\Big|_0^2 \\ &= 4\left(1-e^{-2}\right)\end{aligned}$$

例 4. 試求橢圓體

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

的體積, 其中 a, b, c 均大於 0.

<解> 由圖示, 根據對稱性, 僅需求出此橢圓體在第一卦限內的實體 Q_1 的體積. 首先, 實體 Q_1 的頂部爲

$$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

且 Q_1 在 xy-平面的投影爲區域

$$R_1:\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\\ x\ge 0\\ y\ge 0\end{cases}$$

故根據體積的定義,

$$Q_1 \text{ 的體積} = c\iint_{R_1}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dA \tag{4}$$

乃一 xy-平面中區域 R_1 上的二重積分, 但被積函數缺少代入法所需的 x 或 y, 同時積分區域 R_1 亦不能表示成極坐標中的 θ-簡單區域, 故無法根據 Fubini 定理將上式改寫成直角坐標或極坐標型式的逐次積分. 然而根據積分區域 R_1 的表示式以及被積函數, 一個適當的變數變換乃是令

$$u=\frac{x}{a},\ v=\frac{y}{b}$$

則 uv-平面中對應的區域

$$S_1:\begin{cases} u^2+v^2\le 1\\ u\ge 0,\ v\ge 0\end{cases}$$

乃一個在第一象限中的四分之一圓, 以及

$$\begin{array}{l} x=au\\ y=bv\end{array}\ :S_1\to R_1$$

爲一個一對一, 映成轉換, 如圖示, 且 Jacobian

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{vmatrix}=ab$$

因此, 根據 (1) 式, 經由變數變換公式

$$x=au,\ y=bv,\ dA=|ab|dudv$$

由 (4) 式得

$$\begin{aligned} Q_1 \text{ 的體積} &= c\iint_{S_1}\sqrt{1-u^2-v^2}\,(ab)dudv \\ &= abc\iint_{S_1}\sqrt{1-u^2-v^2}\,dudv \end{aligned}$$

因爲區域 S_1 可表示成 θ-簡單區域

$$S_1 : \begin{cases} 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$$

故經由極坐標型式的變數變換

$$u = r\cos\theta,\ v = r\sin\theta,\ dudv = rdrd\theta$$

如圖示, 由上式得

$$\begin{aligned} & Q_1 \text{ 的體積} \\ &= abc\int_0^{\pi/2}\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,rdrd\theta \\ &= abc\int_0^{\pi/2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}\left(1-r^2\right)^{3/2}\Big|_0^1 d\theta \\ &= abc\int_0^{\pi/2}\frac{1}{3}d\theta = \frac{1}{3}abc\theta\Big|_{\theta=0}^{\pi/2} = \frac{1}{6}\pi abc \end{aligned}$$

因此, 根據對稱性,

$$\begin{aligned} \text{橢圓體體積} &= 8\cdot(Q_1 \text{ 的體積}) \\ &= 8\cdot\left(\frac{1}{6}\pi abc\right) = \frac{4}{3}\pi abc \end{aligned}$$

註. 若 $a=b=c$, 則橢圓體就是球體, 其體積為

$$\frac{4}{3}\pi a^3$$

與例 4 的結論一致.

註. 雙變數變數變換的概略證明. 設

$$x=g(u,v),\ y=h(u,v)$$

為一由 uv-平面上區域 S 至 xy-平面上區域 R 的一對一, 映成轉換. 為方便計, 設 S 中由區間 $[u_{i-1},u_i]$ 與 $[v_{j-1},v_j]$ 所形成的小矩形 S_{ij} 對應至 R 中的一個以

$$\mathbf{x}_{i-1,j-1}(M),\ \mathbf{x}_{i,j-1}(N),\ \mathbf{x}_{i-1,j}(Q),\ \mathbf{x}_{i,j}(P)$$

為端點的小區域 R_{ij}, 其中

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}_{i-1,j-1}=(g(u_{i-1},v_{j-1}),h(u_{i-1},v_{j-1}))=M\\
&\mathbf{x}_{i,j-1}=(g(u_i,v_{j-1}),h(u_i,v_{j-1}))=N\\
&\mathbf{x}_{i-1,j}=(g(u_{i-1},v_j),h(u_{i-1},v_j))=Q\\
&\mathbf{x}_{i,j}=(g(u_i,v_j),h(u_i,v_j))=P
\end{aligned}$$

如圖示, 則 R_{ij} 的面積

$$\Delta A_{ij}\approx\Delta A'_{ij}$$

其中 $\Delta A'_{ij}$ 為 $\overrightarrow{MN}$ 與 $\overrightarrow{MQ}$ 所形成的平行四邊形的面積.

又根據雙變數函數的線性近似

$$\begin{aligned} & f(x,y)-f(x_0,y_0) \\ \approx\ & f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \end{aligned}$$

得

$$\overrightarrow{MN}\approx(g_u(u_{i-1},v_{j-1}),h_u(u_{i-1},v_{j-1}))\Delta u_i$$

此乃因爲橫軸坐標的差

$$\begin{aligned} & g(u_i,v_{j-1})-g(u_{i-1},v_{j-1}) \\ \approx\ & g_u(u_{i-1},v_{j-1})(u_i-u_{j-1}) \\ & \qquad +g_v(u_{i-1},v_{j-1})(v_{j-1}-v_{j-1}) \\ =\ & g_u(u_{i-1},v_{j-1})\Delta u_i \end{aligned}$$

以及縱軸坐標的差

$$\begin{aligned} & h(u_i,v_{j-1})-h(u_{i-1},v_{j-1}) \\ \approx\ & h_u(u_{i-1},v_{j-1})(u_i-u_{j-1}) \\ & \qquad +h_v(u_{i-1},v_{j-1})(v_{j-1}-v_{j-1}) \\ =\ & h_u(u_{i-1},v_{j-1})\Delta u_i \end{aligned}$$

所致. 同理,

$$\overrightarrow{MQ}\approx(g_v(u_{i-1},v_{j-1}),h_v(u_{i-1},v_{j-1}))\Delta v_i$$

因爲橫軸坐標的差

$$g(u_{i-1},v_j)-g(u_{i-1},v_{j-1})\approx g_v(u_{i-1},v_{j-1})\Delta v_i$$

以及縱軸坐標的差

$$h(u_{i-1},v_j)-h(u_{i-1},v_{j-1})\approx h_v(u_{i-1},v_{j-1})\Delta v_i$$

所致. 故根據面積公式,

$$\begin{aligned}\Delta A_{ij}\approx\Delta A'_{ij}&=|\overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{MQ}|\\&=\left\|\begin{matrix}g_u(u_{i-1},v_{j-1}) & h_u(u_{i-1},v_{j-1})\\ g_v(u_{i-1},v_{j-1}) & h_v(u_{i-1},v_{j-1})\end{matrix}\right\|\Delta u_i\Delta v_j\\&=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Bigg|_{(u_{i-1},v_{j-1})}\Delta u_i\Delta v_j\end{aligned}$$

因此, 根據二重積分的黎曼和極限定義,

$$\begin{aligned}\iint_R f(x,y)dA&\approx\sum_{i,j}f(\mathbf{x}_{i-1,j-1})\Delta A_{ij}\\&\approx\sum_{i,j}f(g(u,v),h(u,v))\cdot\\&\qquad\qquad\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Bigg|_{(u_{i-1},v_{j-1})}\Delta u_i\Delta v_j\\&\approx\iint_S f(g(u,v),h(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dA\end{aligned}$$