單元 8: 連續函數的定理
(課本 §3.5 與 §5.1.1)

定義. 設 f 在 D 上有定義, 且 $c \in D$.

1. 若對所有的 $x \in D$, $f(c) \geq f(x)$, 則稱 $f(c)$ 爲絕對最大值 (absolute maximum) (簡記成 abs max).

2. 若對所有的 $x \in D$, $f(c) \leq f(x)$, 則稱 $f(c)$ 爲絕對最小值 (absolute minimum) (簡記成 abs min).

3. 絕對最大值或絕對最小值統稱爲絕對極值 (absolute extremum).

問. 在何種條件下 (或何時), 一定保證有絕對極值?

觀察: 下列四個圖形暗示一些相關的訊息.

圖 1: 在開區間 (a,b) 上同時有絕對最大值與絕對最小值.

圖 2: 雖然 $\lim_{x\to b^-} f(x) = 6$ 但對所有的 $x \in (a,b)$, $f(x) < 6$, 故無法找到一 $c \in (a,b)$ 使得 $f(c) = 6$ 而大於所有其他的值. 因此, 無絕對最大值.

結論 1: 當 D 不爲閉區間時, 不一定會有絕對極值.

圖 3: 對所有的 $x \in [a,b]$, $f(x) < \lim_{x\to a_1} f(x) = 5$. 但卻無法找到一 $c \in [a,b]$ 使得 $f(c) = 5$ 而大於所有其他的值. 因此, 無絕對最大值.

圖 4: 對所有的 $x \in [a,b]$,

$$\lim_{x\to b_1} f(x) = 1 < f(x) < \lim_{x\to a_1} f(x) = 5$$

但卻無法在 $[a,b]$ 中找到 c 與 d 使得 $f(c) = 1$ 且 $f(d) = 5$. 所以, 無絕對最大值與絕對最小值.

結論 2: 即使 D 爲閉區間, 但當 f 在 D 上不連續時, 不一定會有絕對極值.

總結: 結論 1 與結論 2 暗示連續性加上閉區間可以保證有絕對極值.

確實如此, 如下面定理所述.

定理 1. 極值定理 (Extreme Value Theorem). 若 f 在閉區間 $[a, b]$ 上連續, 其中 $-\infty < a < b < \infty$, 則 f 在 $[a, b]$ 上一定有絕對最大值與絕對最小值.

註 1. 證明: 略 (因爲太深, 超出本書範圍.)

註 2. 如圖所示, 產生絕對最小值或絕對最大值的地方, 可能不只一處. 如何找? 除了繪圖及基本方法外, 其他方法將於微分中交待.

例 1. 找出下列各函數的絕對極值, 若存在的話.

(a) $f(x) = -e^x$, $0 \le x \le 2$

(b) $g(x) = \ln(x - 1)$, $2 \le x \le 4$

<解> 目前僅根據定理 1 及繪圖的方式找出絕對極值.

(a) $f(x) = -e^x$: 在 $[0, 2]$ 上連續, 故, 根據定理 1 一定有絕對極值. 接著以繪圖 (透過基本轉換) 將其找出, 如圖示. 所以,

$$\text{絕對極大值} \ = -e^0 = -1$$

且

$$\text{絕對極小值} \ = -e^2$$

(b) $g(x) = \ln(x-1)$ 在 $[2, 4]$ 上連續, 所以有絕對極值. 繪圖 (透過基本轉換) 如下所示. 得,

$$\text{絕對最小值} \ = \ln(2-1) = \ln 1 = 0$$

以及

$$\text{絕對最大值} \ = \ln(4-1) = \ln 3$$

定理 2. 中間值定理 (Intermediate Value Theorem). 設 f 在閉區間 $[a, b]$ 上連續. 若 L 是介於 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之間的任一實數, 則至少有一 $c \in (a, b)$ 使得 $f(c) = L$.

註 1. 證明: 略 (因爲太深, 超出課程範圍).

註 2 口語上的敍述: 若 f 在一閉區間上連續, 則介於兩端點函數值的中間的任何一數, 都會是 (此函數在此閉區間上的) 一個函數值.

註 3. 此定理僅保證 c 的存在, 至於幾個 c 及在哪裡並未提及.

註 4. 繪圖說明. 圖 1: 有三個點 c_1, c_2, c_3 都使得

$$f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = L$$

圖 2: 只有一個 c 使得 $f(c) = L$.

註 5. 若 f 不連續時, 則不一定保證 c 的存在; 如圖示, 無法找到 c 使得 $f(c) = L$. 但有時結果成立, 與定理不衝突, 因爲連續加上閉區間僅是<u>充分</u>條件而非必要條件.

例 2. 令

$$f(x) = 3 + \sin x,\ 0 \le x \le \frac{3\pi}{2}$$

試證至少有一 $c \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ 使得 $f(c) = \frac{5}{2}$.

<證> 首先 f 在閉區間 $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上連續且

$$f(0) = 3 + \sin 0 = 3$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3 + \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3 - 1 = 2$$

又

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 < \frac{5}{2} < 3 = f(0)$$

所以, 由中間值定理知, 至少有一

$$c \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$$

使得

$$f(c) = \frac{5}{2}$$

例 3. (勘根定理). 試求方程式 $x^5 - 7x^2 + 3 = 0$ 的一根.

<解> 令 $f(x) = x^5 - 7x^2 + 3$. 因爲 $f(x)$ 是一多項式, 故 $f(x)$ 在整個實數 R 上連續. 又

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}(x^5 - 7x^2 + 3) &= \lim_{x\to\infty} x^5\left(1 - \frac{7}{x^3} + \frac{3}{x^5}\right) \\
&= (\infty)^5(1 - 0 + 0) \\
&= \infty > 0
\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} x^5-7x^2+3 &= \lim_{x\to-\infty} x^5\left(1-\frac{7}{x^3}+\frac{3}{x}\right)\\ &= (-\infty)^5(1-0+0)\\ &= -\infty<0\end{aligned}$$

因為 0 介於 $\pm$ 值之間, 故由中間值定理, 至少有一 c 使得 $f(c)=0$ (亦即, c 是一根).

問. 如何求? (如何近似?) 一個方法如下.

二分法 (bisection method): 求方程式的根的近似值, 步驟如下.

1. 先取一 $[a,b]$ 使得 $f(a)$ 與 $f(b)$: 一正, 一負.

   因為 0 介於 $f(a)$ 與$f(b)$ 間, 故, 根據勘根定理, 存在一 $c\in[a,b]$ 使得 $f(c)=0$, 亦即 c 為 $f(x)$ 的一根. 如,

   $$f(-1)=-1-7+3=-5<0$$

   且

   $$f(2)=32-28+3=7>0$$

所以, 可取

$$[a,b]=[-1,2]$$

並導出

$$根 \in [-1,2]$$

2. 取中點 $\frac{a+b}{2}$, 將 $[a,b]$ 二分: 若

$$f(a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\begin{cases}(-), & 令\ b=\frac{a+b}{2}\\ (+), & 令\ a=\frac{a+b}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(a)\cdot f(b)=(-)$$

故, 根 $\in$ 新的 $[a,b]$ 內 (長度爲原先之一半)

3. 重複步驟 2 直至 $[a,b]$ 的長度 $<$ 要求的準確度.

4. 令近似根 $=\frac{a+b}{2}$, 得一誤差小於要求準確度的近似根.

因爲眞正的根與近似根 $(=\frac{a+b}{2})$ 均介於 $[a,b]$ 區間內, 如圖示, 故

$$\left|根-\frac{a+b}{2}\right|<b-a<準確度$$

註 1. 因爲是不斷地重複二分的步驟直至符合要求的準確度, 故可由任何的程式語言寫一程式由電腦快速地估計出近似根, 可自行嘗試.

註 2. 當然二分的次數愈多, 愈符合要求的準確度, 但爲了有效運用資源 (時間, 金錢等等) 起見, 應該是執行充分的 (亦即, 最少的) 二分次數即可. 如何求出此充分的二分次數?

<解> 設由最初的區間 $[a, b]$ 開始二分. 每次二分後, 區間長度變爲分割前的一半且根依然在新的區間內. 故, 二分 n 次後且令中間點爲近似根時, 可得

$$|\text{近似根} - \text{根}| < \left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a) \tag{1}$$

因此, 只需 n 滿足

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a) < \text{準確度} \tag{2}$$

就可由 (1) 式得到近似根與眞正的根的誤差在要求的準確度內. 所以, 充分的二分次數就是滿足 (2) 式的最小的 n. 解之, 得

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{\text{準確度}}{b-a}$$

顚倒後, 相當於

$$2^n > \frac{b-a}{\text{準確度}}$$

兩邊取自然對數 ln 並化簡, 得

$$n\ln 2 = \ln 2^n > \ln\left(\frac{b-a}{\text{準確度}}\right)$$

故,

$$n > \frac{1}{\ln 2}\cdot\ln\left(\frac{b-a}{\text{準確度}}\right)$$

因此, 可取

$$n = \left[\frac{1}{\ln 2}\cdot\ln\left(\frac{b-a}{\text{準確度}}\right)\right] + 1$$

並以此作爲充分的二分次數.

除了上述準確的公式外, 若數字不是很複雜, 可直接代入連續的正整數 n 至 (2) 式 (或與其等價並容易計算的式子), 直至滿足 (2) 式的 n 值出現爲止.

舉例: 若 $[a,b] = [-1,2]$ 且準確度 $= 0.006$, 則準確公式的

$$\begin{aligned} n &= \left[\frac{1}{\ln 2}\cdot\ln\left(\frac{2-(-1)}{0.006}\right)\right] + 1 \\ &= [8.965784284] + 1 \\ &= 8 + 1 = 9 \end{aligned}$$

直接計算的方式爲代入正整數 n 使其滿足

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 3 < 6 \times 10^{-3}$$

此乃相當於

$$6 \times 2^n > 3 \times 10^3 = 3000$$

代 $n = 5$: $6 \times 2^5 = 6 \times 32 = 192$ (不合)
代 $n = 6$: $6 \times 2^6 = 6 \times 64 = 384$ (不合)
代 $n = 7$: $6 \times 2^7 = 6 \times 128 = 768$ (不合)
代 $n = 8$: $6 \times 2^8 = 6 \times 256 = 1536$ (不合)
代 $n = 9$: $6 \times 2^9 = 6 \times 512 = 3072$ (成立)
所以, 取 $n = 9$.