單元 5: 夾擠定理與三角的極限
(課本 §3.4)

定理 1. 比較定理 (Comparison Theorem). 設 $c \in (a,b)$ 且對所有在 (a,b) 中 c 以外的點 x,

$$f(x) \le g(x)$$

則

$$\lim_{x \to c} f(x) \le \lim_{x \to c} g(x)$$

如圖 1 說明.

定理 2. 夾擠定理 (Squeeze or Sandwich Theorem). 設 $c \in (a,b)$ 且對所有在 (a,b) 中 c 以外的點 x,

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

若

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$$

則

$$\lim_{x \to c} g(x) = L$$

如圖 2 說明.

例 1. 試求

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$$

<解> 首先設法找出夾擠原式的上, 下函數, 如下述:

$$\begin{aligned}\left|x\sin\frac{1}{x}\right| &= |x|\left|\sin\frac{1}{x}\right| \\ &\leq |x|\end{aligned}$$

(因爲 $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$). 所以,

$$-|x| \leq x\sin\frac{1}{x} \leq |x|$$

又 $|x|$ 的圖形如圖 3 所示, 或由註 5 的定義證明.

得,

$$\lim_{x\to 0}|x| = 0$$

且

$$\lim_{x\to 0} -|x| = -\lim_{x\to 0}|x| = -(0) = 0$$

因此, 根據夾擠定理,

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

兩個三角極限 (Trigonometric limits):

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$

註 1. 兩個三角極限的解釋:

1. 極限

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

意謂著當 x 靠近 0 時,

$$\sin x \approx \text{ (近似於, 相當於) } x$$

如圖 4 所示.

2. 極限

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

意謂著當 x 靠近 0 時,

$$1-\cos x \ll \text{ (遠小於) } x$$

如圖 5 所示.

註 2. 代入 0, 得

$$\frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0}$$

以及

$$\frac{1-\cos 0}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

上二式均為未定式 $\frac{0}{0}$, 但卻有不一樣的結果, 故稱

$$\frac{0}{0}$$

為未定式 (indeterminate form).

<證> (1) $x \to 0 \Leftrightarrow$ 可僅考慮 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. 接著再分別考慮兩種情況.

情況 1: $0 < x < \frac{\pi}{2}$. 根據圖形 6, 可得

$$BD \text{ 的弧長} = x$$

$$(\text{因為 } \frac{\text{弧長}}{x} = \frac{2\pi(1)}{2\pi} = 1)$$

$$\overline{OA} = \cos x$$

$$\overline{AD} = \sin x$$

$$\overline{BC} = \tan x$$

又

$$\triangle OAD \text{ 的面積 } \leq \text{扇形 } OBD \text{ 的面積} \leq \triangle OBC \text{ 的面積}$$

此乃相當於

$$\frac{1}{2}(\overline{OA})(\overline{AD}) \leq \frac{1}{2}(\overline{OB})^2 x \leq \frac{1}{2}(\overline{OB})(\overline{BC})$$

$$(\text{因爲 } \frac{\text{扇形面積}}{x} = \frac{\pi(OB)^2}{2\pi} = \frac{1}{2}(\overline{OB})^2)$$

又相當於

$$\frac{1}{2}\sin x \cos x \leq \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2}\tan x$$

因爲 $\frac{1}{2}\sin x > 0$, 各項同除以 $\frac{1}{2}\sin x\,(> 0)$ 後, 可得

$$\cos x \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

又因上式各項均大於 0, 顚倒後, 可得

$$\frac{1}{\cos x} \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x$$

因爲

$$\lim_{x\to 0^+} \cos x = \cos 0 = 1$$

且

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\lim_{x\to 0^+} \cos x} = \frac{1}{1} = 1$$

所以, 由夾擠定理,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$$

情況 2: $-\frac{\pi}{2}<x<0$. 令 $z=-x$, 則

$$x\to 0^- \Leftrightarrow z=-x\to 0^+$$

所以,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x} &= \lim_{z\to 0^+}\frac{\sin(-z)}{-z}\\ &\quad (\text{因爲 } x=-z)\\ &= \lim_{z\to 0^+}\frac{-\sin z}{-z}\\ &= \lim_{z\to 0^+}\frac{\sin z}{z}\\ &= 1, \text{ 根據情況 1}\end{aligned}$$

因此, 綜合情況 1 與情況 2, 得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

(2) 根據 (1) 的結果及三角恆等式, 直接求極限. 首先, 將原式的分子, 分母同乘以 $1+\cos x$, 並化簡, 得

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos x}{x} &= \frac{1-\cos x}{x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\\ &= \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}\end{aligned}$$

接著兩邊取極限, 並調整等號右邊的分子, 分母, 得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)\\ &= 1\cdot\frac{0}{1+1} = 1\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

註 3. 極限爲 1 時, 顚倒後的極限還是 1.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\\ &= \frac{\lim_{x\to 0} 1}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}\\ &= \frac{1}{1} = 1\end{aligned}$$

註 4. 使用

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

的結果時, 須注意分母的量與分子中代入 sin 函數的量要一樣才可以, 因爲在證明的當中僅要求同樣大小的量趨近於 0, 至於速度則沒有要求.

例. 試求下列各極限:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{5x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\pi x)}{\sqrt{x}}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec x - 1}{x\sec x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\sin 4x}$

<解> (a) 根據註 4, 需要調整成相同的量後, 才可使用三角極限的結果, 調整及推導過程如下:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x} &= \lim_{x\to 0}\frac{3x}{5x}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{3}{5}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\\
&= \frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\\
&= \frac{3}{5}\cdot 1 = \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

(b) 須先調整成含 πx 的量後, 再計算, 過程如下:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi x)}{\sqrt{x}} &= \lim_{x\to 0}\frac{\pi x}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\\
&= \lim_{x\to 0}\pi\sqrt{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\\
&= \pi\cdot\sqrt{0}\cdot 1 = 0
\end{aligned}$$

(c) 先將原式改寫成熟悉的正弦或餘弦函數後, 再處理:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sec x-1}{x\sec x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x\frac{1}{\cos x}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0\end{aligned}$$

(d) 先調整成相同的量後, 再處理:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{7x}{\sin 4x} &= \lim_{x\to 0}\frac{7x}{4x}\cdot\frac{4x}{\sin 4x}\\ &= \frac{7}{4}\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 4x}\\ &= \frac{7}{4}\cdot 1=\frac{7}{4}\end{aligned}$$

註 5. 對任一 $\epsilon>0$,

$$||x|-0|<\epsilon \Leftrightarrow |x-0|<\epsilon \tag{1}$$

所以, 對任一固定的 $\epsilon>0$, 取

$$\delta=\epsilon$$

可得,

$$\text{當 } 0<|x-0|<\delta\ (=\epsilon) \text{ 時}$$

由 (1) 式知,

$$||x|-0|<\epsilon$$

因此, 由 ϵ-δ 定義,

$$\lim_{x\to 0}|x| = 0$$

註 6. 證明

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

的方法, 除了例 1 比較面積外, 亦可考慮比較曲線長的方法, 即

$$AD \text{ 線段長} \le BD \text{ 弧長} \le BC \text{ 線段長}$$

另外, 也可考慮比較

$$\triangle OBD \text{ 的面積} \le \text{扇形 } OBD \text{ 的面積} \le \triangle OBC \text{ 的面積}$$

的方法, 請自行嘗試, 並比較各種方法的差異.